

C Elektrizität

17 Elektrostatische Felder

Die Elektrostatik befasst sich mit ruhenden (statischen) Ladungen. Die Kraftwirkung zwischen Ladungen wird durch elektrische Felder beschrieben.

17.1 Elektrische Ladung

*In der Mechanik gibt es die drei unabhängigen Grundgrößen Masse, Länge und Zeit mit den Einheiten Kilogramm, Meter und Sekunde. Alle anderen Größen wie z. B. Geschwindigkeit oder Kraft werden aus diesen Größen abgeleitet (siehe Abschn. 1.2). In der Elektrodynamik wird eine weitere, vierte Grundgröße benötigt: Die elektrische Ladung mit der **Einheit Coulomb** oder aber die Stromstärke mit der **Einheit Ampere**. Die kleinste Ladungsmenge (außerhalb der Elementarteilchenphysik) ist die sog. Elementarladung e_0 . Protonen haben die Ladung $+e_0$, Elektronen die Ladung $-e_0$.¹*

Nach einem Beschluss der 26sten Generalkonferenz für Maß und Gewicht hat die **Elementarladung** (Protonenladung e_0) seit dem 20. Mai 2020 den *fest fixierten und zukünftig unveränderlichen Wert*

$$e_0 = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C (exakt)} \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (17.1-1)$$

Ich betone nochmals: Zukünftig hat die Elementarladung einen exakt vereinbarten Wert und keine Unsicherheit. *Die Festlegung der Elementarladung definiert auch die Ladungseinheit Coulomb universell und unveränderlich.* Eine Ladung der Größe -1C enthält $10^{19}/1,602\,176\,634$ Elektronen.

Fließende Ladungen erzeugen elektrische Ströme. Die mittlere Stromstärke wird definiert als

¹ Freie Elektronen werden in erster Linie durch den Glüh-effekt, den Photoeffekt oder die Feldemission erzeugt.

$$I_m := \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Damit ist die Einheit Ampere (abgekürzt 'A') der Stromstärke wie folgt festgelegt:

$$1 \text{ Ampere} := \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Sekunde}} \quad \text{oder abgekürzt} \quad 1 \text{ A} := \frac{1 \text{ C}}{\text{s}}$$

Die momentane Stromstärke ist die mittlere Stromstärke im Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$:

$$I(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \dot{Q}(t) \quad (17.1-2)$$

Dabei ist $Q(t)$ die Ladung, die bis zur Zeit t geflossen ist. Die Stromstärke wird also mit der Elementarladung e_0 definiert. Bei einer Stromstärke von 1 A fließen an einer festen Stelle des Leiters pro Sekunde etwa $1/(1,602 \cdot 10^{-19}) \approx 6,25 \cdot 10^{18}$ Elektronen vorbei.

Bemerkung: Auch in der Mechanik werden die momentanen Größen Geschwindigkeit $v(t)$, Beschleunigung $a(t)$ und Leistung $P(t)$ durch den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ aus mittleren Größen abgeleitet.

Experimentell wurden folgende Aussagen für elektrische Ladungen gefunden:

- Es gibt positive und negative elektrische Ladungen. Willkürlich wurde das Vorzeichen der Elektronenladung als negativ festgesetzt. Ladungen mit gleichem (verschiedenen) Vorzeichen stoßen sich ab (ziehen sich an). Im Gegensatz zur Gravitationskraft, die nur anziehend ist, gibt es hier also anziehende und abstoßende Kräfte.
- Ein Elektron hat die Ladung $-e_0$, ein Proton die Ladung e_0 . Alle Ladungen Q sind stets ganzzahlige Vielfache der Elementarladung:

$$Q = k e_0 \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 3, \dots$$

- In abgeschlossenen Systemen, d. h. in Systemen, denen weder Ladungen zugeführt noch entzogen werden, ist die Summe aller Ladungen konstant:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = \text{const} \quad \text{in abgeschlossenen Systemen}$$

Der **Ladungserhaltungssatz** ist vor allem in der Elementarteilchenphysik wichtig.

17.2 Die Coulombkraft

Die elektrische Ladung eines Körpers wird durch die Kräfte nachgewiesen, die andere geladene Körper auf ihn ausüben.² Wir betrachten in Abb. 17.2-1 zwei Ladungen Q_0, Q_1 mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$. Die Ladungen seien punktförmig, d. h. ihre Ausdehnungen seien viel kleiner als ihr Abstand. In Experimenten ermittelte der französische Physiker

² In gleicher Weise kann die Masse m eines Körpers gemessen werden, indem man die Gravitationskraft der Erde auf ihn misst.

Charles A. Coulomb gegen Ende des 18ten Jahrhunderts, dass die elektrostatische Kraft zwischen ruhenden Ladungen

- proportional zum Produkt $Q_0 Q_1$ der beiden Ladungen ist.
- indirekt proportional zum Quadrat $(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2$ des Abstandes ist.
- parallel zur Verbindungslinie der beiden Ladungen ist.

1785 stellte Coulomb das **Coulombsche Gesetz** auf; es beschreibt die **Coulombkraft**, die die Ladung Q_1 auf die Ladung Q_0 ausübt:

$$\mathbf{F}_{01} = k \frac{Q_0 Q_1}{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|}$$

Für spätere Rechnungen ist es vorteilhaft, die Konstante k in der Form $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ zu schreiben. Dann lautet die Coulombkraft der Punktladung Q_1 auf die Punktladung Q_0 ³:

$$\mathbf{F}_{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q_1}{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} \quad (17.2-1)$$

ϵ_0 heißt **elektrische Feldkonstante** oder **Dielektrizitätskonstante des Vakuums** oder Influenzkonstante und hat nach den Experimenten den Wert⁴

$$\epsilon_0 = 8,854\,187\,812\,8(13) \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (17.2-2)$$

In der Quantenmechanik beschreiben die Coulombkräfte die Bindung der Elektronen an den Atomkern, die Wechselwirkung zwischen Atomen und Molekülen und schließlich auch die zwischenatomaren Kräfte in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen.

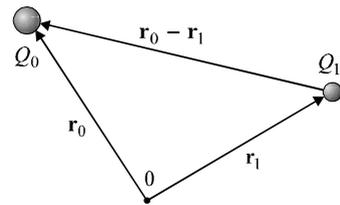


Abb. 17.2-1 Die Coulombkraft zwischen beiden Ladungen ist proportional zum Produkt $Q_0 Q_1$ der Ladungen und indirekt proportional zum Quadrat der Entfernung.

³ Nach Beispiel 17.4-3 gilt die Gl. (17.2-1) auch im Außenraum von allen ausgedehnten, *kugelsymmetrischen* Ladungsverteilungen mit Gesamtladung Q_1 .

⁴ Aus den Maxwell-Gln. ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldkonstante ϵ_0 , der magnetischen Feldkonstante μ_0 (siehe Abschn. 21.2) und der Lichtgeschwindigkeit c :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad (17.2-3)$$

1948 wurde μ_0 durch die Lorentzkraft zwischen zwei parallelen, stromdurchflossenen Leitern *exakt* festgelegt. (Nähere Erläuterungen stehen in Aufgabe 21-8). 1983 wurde c ebenfalls *exakt* vereinbart. Daher wurde ϵ_0 bis 2019 durch die Gl. $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$ genau bestimmt.

2019 traf die 26ste Generalkonferenz für Maß und Gewicht neue Vereinbarungen, die für alle Zeiten gelten sollen; dabei wurde u. a. die Elementarladung e_0 *exakt* festgelegt. Seitdem sind ϵ_0, μ_0 mit Fehlern behaftete Messgrößen.

Das Coulombgesetz (17.2-1) hat die gleiche Form wie das Gravitationsgesetz, das die Anziehungskraft zwischen zwei Massen beschreibt:

$$\mathbf{F}_{01} = -\gamma \frac{m_0 m_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} \quad \text{mit der Gravitationskonstanten} \quad \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Der einzige Unterschied besteht darin, dass es nur *positive* Massen und *anziehende* Gravitationskräfte gibt.

Da Coulombkräfte und Gravitationskräfte beide indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes sind, hängt ihr Verhältnis nicht vom Abstand ab. Das Verhältnis der beiden Kräfte ist für Protonen mit $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{8,988 \cdot 10^9 \text{ Nm/C}^2 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2} \approx 1,24 \cdot 10^{36}$$

Übrigens: Atomkerne sind trotz der abstoßenden Coulombkräfte zwischen den Protonen stabil, weil Protonen und Neutronen durch die „Starke Wechselwirkung“ zusammengehalten werden, auf die ich nicht weiter eingehe.

Beispiel 17.2-1 Pendel im Gleichgewicht

Zwei kleine Metallkugeln mit Masse m und Ladung Q hängen an Fäden der Länge l im selben Punkt an der Decke (siehe Abb. 17.2-2).

Berechne die Entfernung d der Kugeln im Gleichgewicht für $d \ll l$.

Lösung:

Wir betrachten die rechte Kugel in Abb. 17.2-3. Auf die Kugel wirken die Gewichtskraft $m\mathbf{g}$ und die Coulombkraft \mathbf{F}_C . Das rechte Pendel ist genau dann im Gleichgewicht, wenn sein Faden parallel ist zur resultierenden Kraft $m\mathbf{g} + \mathbf{F}_C$, also für

$$\begin{aligned} \varphi = \alpha &\Rightarrow \sin \varphi = \sin \alpha \approx \tan \alpha \\ \Rightarrow \frac{d}{2l} &\approx \frac{F_C}{mg} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} \frac{1}{mg} \\ \Rightarrow d &\approx \left(\frac{Q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

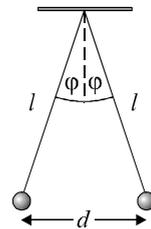


Abb. 17.2-2 Die Coulombkraft drückt die Pendel auseinander.

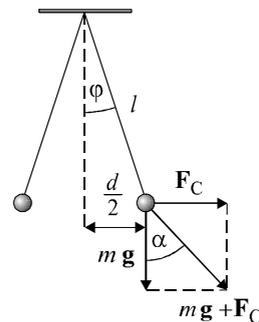


Abb. 17.2-3 Auf die Pendelmasse wirken die Gewichtskraft $m\mathbf{g}$ und die Coulombkraft \mathbf{F}_C .

17.3 Das elektrische Feld

Das Coulombgesetz kann leicht auf mehrere ruhende Ladungen verallgemeinert werden (siehe Abb. 17.3-1): n Punktladungen Q_i mit den Ortsvektoren \mathbf{r}_i (und auch n kugel-

symmetrische Ladungsverteilungen mit den Ortsvektoren \mathbf{r}_i ihrer Ladungsmittelpunkte) üben insgesamt auf eine Punktladung q an der Stelle \mathbf{r} die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q Q_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (17.3-1)$$

aus. Die gesamte Coulombkraft ist also einfach die Vektorsumme der n einzelnen Coulombkräfte; es gilt das **Superpositionsprinzip**.

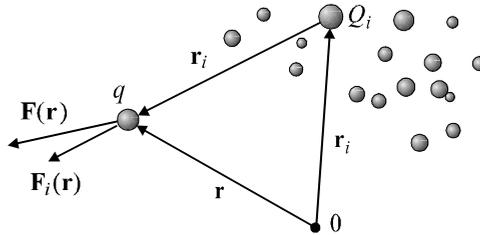


Abb. 17.3-1 Die gesamte Kraft aller Punktladungen Q_i auf die Ladung q ist die Vektorsumme der n Einzelkräfte der i -ten Ladung auf die Ladung q .

Die Kraft \mathbf{F} ist proportional zur Probeladung q und kann wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (17.3-2)$$

Diese Gl. definiert eine neue physikalische Größe, das **elektrische Feld** $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

n Ladungen Q_i mit Ortsvektoren \mathbf{r}_i erzeugen am Ort \mathbf{r} das elektrische Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (17.3-3)$$

Nach dieser Definition ist das elektrische Feld am Ort \mathbf{r} die Kraft auf eine Probeladung q , die sich am Ort \mathbf{r} befindet, dividiert durch q .

Die Einheit des elektrischen Feldes⁵ ist N/C. Mit der später eingeführten Einheit 'Volt' (der Spannung) lautet die Einheit V/m:

$$\text{Einheit des elektrischen Feldes: } \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (17.3-4)$$

⁵ Der Begriff „**Feld**“ ist ein zentraler Begriff in der Physik. Allgemein ist ein Feld eine physikalische Größe, die vom Ort \mathbf{r} und evtl. auch von der Zeit t abhängt. Es gibt zwei Arten von Feldern:

- **Skalare Felder** $F = F(\mathbf{r}, t)$: Ein Beispiel ist das Temperaturfeld $T(\mathbf{r}, t)$, das die Temperaturverteilung beschreibt, indem es jedem Ort \mathbf{r} zu jeder Zeit t eine Temperatur zuordnet.
- **Vektorfelder** $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$: Beispiele sind das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und das später eingeführte Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

Das elektrische Feld, das die Ladungen Q_i erzeugen, ist unabhängig von der Probeladung q und hängt nur von der Verteilung und der Größe der Ladungen Q_i ab. Nach dem Superpositionsprinzip überlagern sich die elektrischen Felder mehrerer Ladungen linear. Das elektrische Feld einer positiven (negativen) Punktladung zeigt radial nach außen (innen).

Nach Gl. (17.3–5) lassen sich elektrische Felder durch Kräfte auf Probeladungen messen.

Dabei muss die Probeladung q so klein sein, dass sie die Verteilung der Ladungen Q_i , d. h. die Ortsvektoren \mathbf{r}_i durch rückwirkende Kräfte nicht (wesentlich) ändert. Andernfalls würde sich das zu messende Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bei der Messung ändern.

Beispiel 17.3–1 Feldstärke im Fernfeld eines Dipols

Ein **Dipol** besteht aus zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen mit dem Abstand $2d$. Betrachte einen Dipol, dessen Ladungen übereinander liegen und berechne das elektrische Feld im Punkt P, der im Fernfeld ($r \gg d$) auf einer horizontalen Gerade liegt, die die Verbindungslinie beider Ladungen in der Mitte senkrecht schneidet.

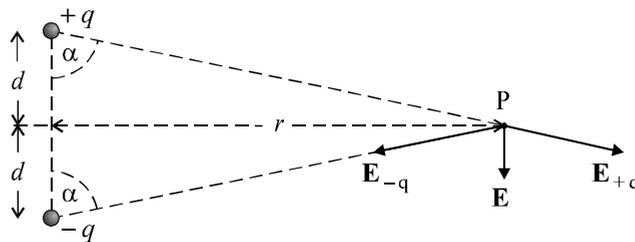


Abb. 17.3–2 Dipol mit elektrischen Feldern im Fernpunkt P. Es gelte: $q > 0$

Lösung:

Im Punkt P sind die Beträge der beiden elektrischen Felder, die von den beiden Ladungen erzeugt werden, gleich groß und lauten

$$E_{+q} = E_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + d^2}$$

Die horizontalen Komponenten der beiden Vektorfelder $\mathbf{E}_{+q}, \mathbf{E}_{-q}$ heben sich nach Abb. 17.3–2 gegenseitig auf; die vertikalen Komponenten haben dieselbe Richtung und addieren sich daher. Die Summe \mathbf{E} der beiden Vektorfelder $\mathbf{E}_{+q}, \mathbf{E}_{-q}$ ist vertikal und hat den Betrag

$$\begin{aligned} E &= 2E_{+q} \cos\alpha = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + d^2} \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} = \\ &= \frac{2dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \quad (\text{exakt auch im Nahfeld}) \quad (17.3-6a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E \underset{\substack{\approx \\ \text{nur für } r \gg d}}{\approx} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2dq}{r^3} \quad (\text{nur im Fernfeld}) \quad (17.3-6b)$$

Der Ladungsabstand $2d$ und die Ladung q treten im Fernfeld nur als Produkt auf. Da dieses Ergebnis für alle Punkte im Fernfeld gilt (also auch für Punkte, die nicht auf der gestrichelten, horizontalen Achse in Abb. 17.3–2 liegen), können die Ladung q und der Abstand $2d$ im Fernfeld nicht einzeln gemessen werden, sondern nur das sog. **elektrische Dipolmoment**

$$p := 2dq \quad (17.3-7)$$

Der rasche Abfall des Feldes mit r^{-3} ist darauf zurückzuführen, dass die zwei Ladungen mit wachsendem Abstand r – relativ gesehen – immer näher „zusammenrücken“, so dass ihre Felder nicht nur immer schwächer werden, sondern sich auch immer mehr gegeneinander aufheben.

Wenn in einem Volumen V nicht einzelne Ladungen Q_i , sondern eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit der **Ladungsdichte**

$$\rho(\mathbf{r}) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad \text{an der Stelle } \mathbf{r} \quad (17.3-8)$$

vorliegt, dann lautet das elektrische Feld an der Stelle \mathbf{r} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (17.3-9)$$

Beispiel 17.3–2 Feldstärke auf der Symmetrieachse einer geladenen Scheibe

a) Berechne das elektrische Feld $\mathbf{E}(x)$ in einem Punkt P auf der Symmetrieachse eines homogen geladenen, dünnen Ringes mit Radius r_{Ring} und positiver Gesamtladung Q (siehe Abb. 17.3–3).

b) Berechne das Feld $\mathbf{E}(x)$ auf der Symmetrieachse einer Scheibe mit Radius r_{Scheibe} , positiver Gesamtladung Q und konstanter Flächenladungsdichte

$$\sigma := Q/(\pi r_{\text{Scheibe}}^2).$$

c) Untersuche die Grenzfälle $x \gg r_{\text{Scheibe}}$ und $x \ll r_{\text{Scheibe}}$.

Lösung:

a) Aus Symmetriegründen ist das elektrische Feld \mathbf{E} auf der x -Achse parallel zur x -Achse.

Das dunkle Volumenelement dV in Abb. 17.3–3 erzeugt auf der Symmetrieachse im Punkt P ein Feld mit dem Betrag

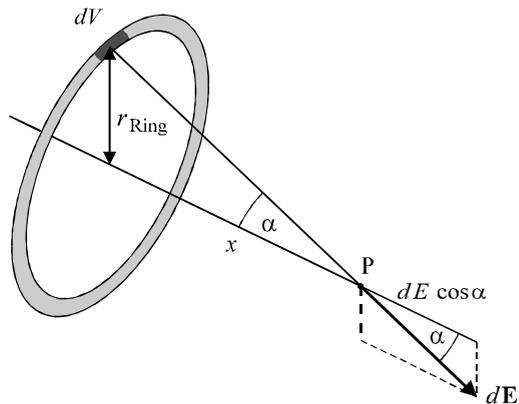


Abb. 17.3–3 Das dunkle Ringelement dV erzeugt auf der Symmetrieachse das Feld dE .

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r_{\text{Ring}}^2 + x^2}$$

Bei der Integration über alle Volumenelemente bleibt aus Symmetriegründen nur die x-Komponente des elektrischen Feldes übrig. Daher interessieren wir uns nur für

$$\begin{aligned} dE_x &= dE \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r_{\text{Ring}}^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{r_{\text{Ring}}^2 + x^2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dQ}{(r_{\text{Ring}}^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Bei der Integration über alle Volumenelemente ist x konstant, so dass nur das Integral $\int dQ = Q$ zu berechnen ist. Wir erhalten

$$E_{\text{Ring}}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x Q}{(r_{\text{Ring}}^2 + x^2)^{3/2}} \quad (17.3-10)$$

Für $x \gg r_{\text{Ring}}$, also im Fernfeld folgt das plausible Ergebnis: $E_{\text{Ring}}(x) \approx Q/(4\pi\epsilon_0 x^2)$

b) Wir nehmen an, dass die Scheibe aus vielen konzentrischen Ringen besteht – jeweils mit Radius r , infinitesimaler Ringdicke dr und infinitesimaler Fläche $dA = 2\pi r dr$. Nach Gl. (17.3–10) erzeugen diese Ringe auf der Symmetrieachse Felder der Stärke

$$dE_{\text{Ring}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dQ}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ dQ = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr \end{matrix} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Integration über alle Ringe ergibt das gesamte elektrische Feld

$$\begin{aligned} E_{\text{Scheibe}}(x) &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^{r_{\text{Scheibe}}} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[(r^2 + x^2)^{-1/2} \right]_0^{r_{\text{Scheibe}}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (r_{\text{Scheibe}}/x)^2}} \right] \end{aligned} \quad (17.3-11)$$

c) Für $x \gg r_{\text{Scheibe}}$ erhalten wir mit der Taylorentwicklung $(1 + \epsilon)^{-1/2} \approx 1 - \epsilon/2$ das Feld

$$E_{\text{Scheibe}}(x) \underset{x \gg r_{\text{Scheibe}}}{\approx} \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{r_{\text{Scheibe}}^2}{x^2} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \sigma = Q/(\pi r_{\text{Scheibe}}^2) \end{matrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2}$$

Wie erwartet erhalten wir in großer Entfernung das Feld einer Punktladung Q .

Für $r_{\text{Scheibe}} \rightarrow \infty$, also für unendlich große Scheiben erhalten wir ein konstantes Feld:

$$E_{\text{Scheibe}}(x) \underset{x \ll r_{\text{Scheibe}}}{\approx} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{für homogen geladene, unendlich ausgedehnte Platten} \quad (17.3-12)$$

(Siehe auch Beispiel (17.4–5).)

Das Vektorfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ kann (wie auch jedes andere Vektorfeld) auf zwei Arten graphisch dargestellt werden:

- Man zeichnet an einigen ausgewählten Stellen \mathbf{r}_i den Vektor $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i)$ auf (siehe Abb. 17.3–4a). Die Länge der gezeichneten Pfeile ist proportional zur Feldstärke.

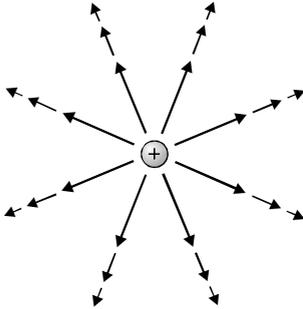


Abb. 17.3–4a Die elektrische Feldstärke einer Punktladung wird an einigen Stellen gezeichnet.

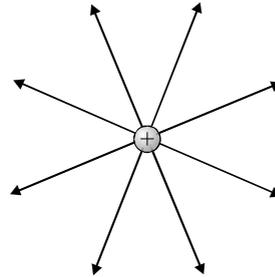


Abb. 17.3–4b Feldlinien einer positiven Punktladung.

- Man zeichnet die sog. **Feldlinien**, die wie folgt definiert sind: *Die Tangenten der Feldlinien haben überall die Richtung der elektrischen Feldstärke. Die Feldlinien zeigen in die Richtung der Kraft auf eine positive Ladung.* Die Dichte der Feldlinien im Raum – nicht in der Ebene – ist proportional zur Feldstärke. *Elektrische Feldlinien beginnen bei einer positiven Ladung und enden bei einer negativen Ladung.* Elektrische Feldlinien schneiden sich nicht.

In gleicher Weise werden in Abschn. „8.1 Grundlagen der Strömungslehre“ die Stromlinien definiert: Die Tangenten der Stromlinien haben die augenblickliche Richtung der Strömungsgeschwindigkeit. Nach der Kontinuitätsgl. wächst die Dichte der Stromlinien mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit.

Bedenke: Feldlinien sind nur *gemalte und gedachte Linien*, die lediglich die Kräfte auf positive Probekörper

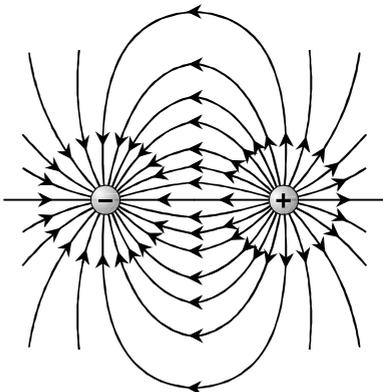


Abb. 17.3–5a Feldlinien eines Dipols. Ihre Tangenten haben überall die Richtung der Feldstärke.

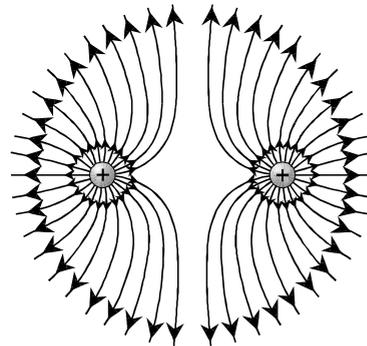


Abb. 17.3–5b Feldlinien von zwei gleich großen Ladungen.

illustrieren sollen. Feldlinien kommt keine direkte physikalische Realität zu.

Feldlinien ergeben übersichtlichere Bilder und werden daher meistens bevorzugt.

Abb. 17.3–5a zeigt die Feldlinien eines **Dipols**, also von zwei entgegengesetzt gleich großen Ladungen. Die Dichte der Feldlinien zeigt, dass die Feldstärke zwischen den Ladungen am größten ist. Abb. 17.3–5b zeigt die Feldlinien von zwei gleich großen Ladungen. In der Mitte zwischen beiden Ladungen ist die Feldstärke exakt null. Wenn keine negativen Ladungen existieren, enden die Feldlinien im Unendlichen.

In Abb. 17.3–6 werden die Feldlinien von zwei verschieden großen Ladungen dargestellt. In großer Entfernung sehen die Feldlinien ähnlich aus wie die Feldlinien einer Ladung $+Q$.

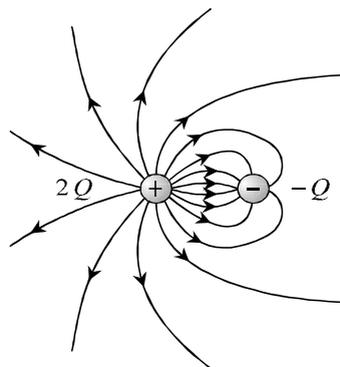


Abb. 17.3–6 Feldlinien von zwei verschieden großen Punktladungen.

17.4 Gaußscher Satz

Elektrische Felder können mit Gl. (17.3–3) oder mit Gl. (17.3–9) oft nur mühsam oder – in den meisten Fällen – nur numerisch berechnet werden. Wir werden nun mit dem Gaußschen Satz eine Berechnungsmethode kennen lernen, die zwar viel einfacher und vor allem viel eleganter ist, die dafür aber nur in sehr wenigen, *symmetrischen Fällen* angewendet werden kann. Der Gaußsche Satz ermöglicht aber nicht nur die Berechnung von symmetrischen elektrischen Feldern, sondern gibt vor allem auch tiefere Einsichten.

Vor der Einführung in den Gaußschen Satz müssen wir den Fluss Φ eines beliebigen Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ durch eine Fläche definieren. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall: Das Vektorfeld \mathbf{F} ist konstant und die Fläche ist eben. Eine ebene Fläche wird durch ihren Normalenvektor \mathbf{A} beschrieben, der laut Definition senkrecht auf der Fläche steht (bei einem Körper zeigt er immer nach außen) und dessen Länge gleich dem Flächeninhalt A ist. Der Fluss durch die ebene Fläche wird als Skalarprodukt definiert:

$$\Phi := \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \quad \text{für konstante Vektorfelder und ebene Flächen} \quad (17.4-1)$$

Beachte, dass der Fluss ein Skalar ist und daher keine Richtung hat. Das folgende Beispiel aus der Strömungslehre macht deutlich, warum das Skalarprodukt aus einem Vektorfeld und einer Fläche ‘Fluss’ heißt – selbst dann, wenn (wie in der Elektrostatik) nichts strömt.

Beispiel 17.4–1 Der Fluss des Geschwindigkeitsfeldes einer strömenden Flüssigkeit

Eine Flüssigkeit oder ein Gas strömt in horizontaler Richtung stationär und homogen, d. h. die Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v} hängt weder vom Ort noch von der Zeit ab. Berechne den

Fluss durch eine ebene Fläche \mathbf{A} und interpretiere die Bedeutung des Flusses in der Strömungslehre.

Lösung:

Das Skalarprodukt

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = v A \cos \vartheta$$

ist das Produkt aus der Strecke, die das Fluid pro Sekunde zurücklegt, und der Fläche $\hat{A} = A \cos \vartheta$, die senkrecht durchströmt wird. Der Fluss $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ ist daher der Volumenstrom in m^3/s , d. h. das Volumen, das pro Sekunde durch die Fläche \mathbf{A} strömt.

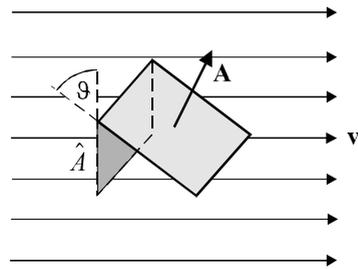


Abb. 17.4-1 Der Fluss eines Fluids durch eine Fläche \mathbf{A} ist gleich v mal die dunkle, projizierte Fläche \hat{A} .

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall: Das Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist nicht konstant oder die Fläche ist nicht eben. In diesem Fall wird die Fläche in n kleine Teilflächen mit Normalenvektoren $d\mathbf{A}_i$ zerlegt (siehe Abb. 17.4-2). Die Teilflächen sind so klein, dass sie näherungsweise eben sind und das Vektorfeld auf jeder Teilfläche ungefähr konstant ist. Nach Gl. (17.4-1) beträgt der Fluss

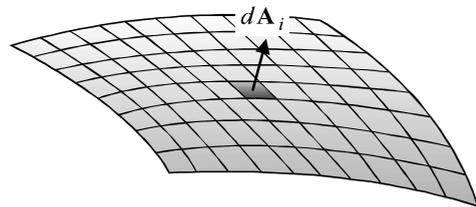


Abb. 17.4-2 Eine gekrümmte Fläche ist aus vielen kleinen, näherungsweise ebenen Flächenelementen zusammengesetzt. Die Normalvektoren $d\mathbf{A}_i$ stehen senkrecht auf den kleinen Flächenelementen.

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{A}_i$$

Wenn die Teilflächen immer kleiner werden, dann geht die Summe in ein Integral über und wir erhalten die allgemeine Definition eines Flusses:

Der Fluss eines beliebigen Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ durch eine Fläche A ist definiert als Flächenintegral

$$\Phi := \int_A \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \tag{17.4-2}$$

Demnach ist der Fluss des elektrischen Feldes

$$\Phi_E = \int_A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \tag{17.4-3}$$



Beispiel 17.4-2 Fluss des elektrischen Feldes einer Punktladung

Eine positive Punktladung Q ruht im Koordinatenursprung. Berechne den Fluss durch eine Kugel mit Radius r und Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \Phi_E &= \int_{A_{\text{Kugel}}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_{\text{Kugel}}} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{A} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \mathbf{r} \text{ parallel zu } d\mathbf{A} \end{array} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_{\text{Kugel}}} \frac{r}{r^3} \cdot dA \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ r \text{ ist bei der Inte-} \\ \text{gration konstant} \end{array} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underbrace{4\pi r^2}_{A_{\text{Kugel}}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (17.4-4)
 \end{aligned}$$

Der Fluss des elektrischen Feldes ist die von der Kugel eingeschlossene Ladung Q dividiert durch die elektrische Feldkonstante ϵ_0 . Dieses Ergebnis ist aus zwei Gründen bemerkenswert:

- Der Fluss hängt nicht vom Kugelradius ab, da mit zunehmendem Radius das elektrische Feld mit $1/r^2$ fällt und die Kugeloberfläche mit r^2 wächst.
- Bei der Coulombkraft wurde in Unterkapitel 17.1 die Proportionalitätskonstante k durch $1/(4\pi\epsilon_0)$ ersetzt, um das Ergebnis in Gl. (17.4-4) so einfach zu machen.

Man kann mathematisch beweisen, dass die Gl. (17.4-4) auf beliebige Ladungsverteilungen und beliebige Flächen verallgemeinert werden kann; man erhält so den Gaußschen Satz:⁶

Gaußscher Satz

Der Fluss des elektrischen Feldes durch eine *beliebige, geschlossene* Fläche A ist gleich der Summe der *eingeschlossenen* Ladungen Q_i dividiert durch ϵ_0 :

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \quad (17.4-5)$$

Ladungen außerhalb der geschlossenen Fläche, über die integriert wird, tragen nicht zum Fluss bei.

Der Gaußsche Satz liefert einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Fluss durch eine geschlossene Fläche⁷ und der eingeschlossenen Ladung. In vielen Aufgaben mit

⁶ Die Gl. (17.4-5) folgt sehr schnell durch Volumenintegration aus der (zu postulierenden) Maxwell-Gl.

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} dV = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

Nach dem Gaußschen Satz der Vektoranalysis gilt:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \oint_A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A}$$

Dabei ist A die geschlossene Oberfläche des Volumens V .

symmetrischer Ladungsverteilung kann das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ mit einfachen Flächenintegralen berechnet werden. Dabei muss die Integrationsfläche die Symmetrie der Ladungsverteilung widerspiegeln, so dass das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ entweder parallel oder senkrecht zu allen Flächennormalen $d\mathbf{A}_i$ ist.

Der Gaußsche Satz ist eine der vier Maxwell-Gln., die eine fundamentale Bedeutung für die Elektrodynamik haben – vergleichbar mit der Wichtigkeit der Newtonschen Axiome für die Mechanik. Oben wurde gesagt, dass der Gaußsche Satz mathematisch aus dem Coulombschen Gesetz (17.2–1) abgeleitet werden kann. Umgekehrt kann auch das Coulombsche Gesetz aus dem Gaußschen Satz und einfachen Symmetrieüberlegungen hergeleitet werden (siehe das folgende Beispiel 17.4–3). *Der Gaußsche Satz (17.4–5) ist daher äquivalent zum Coulombschen Gesetz (17.2–1).*

Wir wollen nun untersuchen, wie in der Elektrostatik elektrostatische Felder im Innern und im Außenraum von leitenden Körpern aussehen.

1) Felder und Ladungen im Leiterinneren: Werden Ladungen auf oder in einen beliebig geformten, leitenden Körper gebracht, dann treten sehr kurzzeitig elektrische Felder im Körperinneren auf. Sie *verschieben die Ladungen solange, bis die elektrischen Felder im Körperinneren verschwinden*. (Den mathematischen Beweis dieser Aussage kann ich hier nicht erbringen.) Daher gilt:

Leitende Körper sind in der Elektrostatik im Innern feldfrei: $\mathbf{E}_{\text{innen}} = \mathbf{0}$

Mit dem Gaußschen Satz folgt daraus sofort eine zweite Aussage:

In der Elektrostatik ist das Innere eines leitenden Körpers nicht nur feldfrei, sondern auch ladungsfrei: $Q_{\text{innen}} = 0$

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass es in der Elektrostatik eine Ladung $Q_{\text{innen}} \neq 0$ im Innern eines leitenden Körpers gibt. Dann ist der Fluss Φ_E für alle geschlossenen Flächen A , die nur diese eine Ladung umschließen, einerseits (wegen $\mathbf{E}_{\text{innen}} = \mathbf{0}$) null, andererseits aber (wegen des Gaußschen Satzes und wegen $Q_{\text{innen}} \neq 0$) nicht null. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist. ■

Auch Hohlräume mit einer geschlossenen, leitenden Oberfläche sind feldfrei. Daher schirmt eine Metallhülle einen Raum sicher gegen äußere elektrostatische Felder ab. Aber auch ein engmaschiges Metallnetz oder -gitter, ein sog. **Faraday-Käfig** liefert in der Praxis meist eine ausreichende Abschirmung.

2) Felder auf Leiteroberflächen: *Statische elektrische Felder stehen im Außenraum senkrecht auf den Leiteroberflächen.* Hätten die Felder eine Komponente parallel zur Leiteroberfläche, so würden sich die Ladungen unter der Oberfläche solange verschieben, bis die elektrischen Felder überall senkrecht auf den Leiteroberflächen stehen.

⁷ Eine Fläche heißt geschlossen, wenn sie ein Volumen vollständig einschließt. Die Oberflächen aller Körper sind geschlossen; ebene Flächen sind nie geschlossen.

Der Betrag der elektrischen Felder kann mit dem Gaußschen Satz ermittelt werden. Um die Flächenintegration möglichst einfach zu machen, sollte die Integrationsfläche der Richtung des elektrischen Feldes im Außenraum angepasst und daher so gewählt werden, dass die Normalenvektoren der Integrationsfläche entweder parallel oder senkrecht zum elektrischen Feld im Außenraum sind. Das ist der Fall, wenn man (in Gedanken) eine sehr kleine Dose so weit in die Oberfläche hineinschiebt, dass eine Stirnfläche innerhalb und die andere Stirnfläche außerhalb der Leiterfläche liegt (siehe Abb. 17.4-3). Die Dose ist so klein, dass die elektrische Feldstärke auf der äußeren Stirnfläche und die örtliche Flächenladungsdichte

$$\sigma := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad (17.4-6)$$

mit ΔQ = Ladung unter der Oberfläche ΔA

auf der eingeschlossenen Leiteroberfläche nahezu konstant sind. Der Fluss durch die Dose ist

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint_{A_{\text{Dose}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\ &= \int_{A_{\text{äußere Stirnfläche}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\ &= E dA \\ &= \int_{A_{\text{äußere Stirnfläche}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\ &= \int_{A_{\text{äußere Stirnfläche}}} E_{\text{parallel}} dA \\ &= E_{\text{parallel}} \int_{A_{\text{äußere Stirnfläche}}} dA \\ &= E_{\text{parallel}} A_{\text{äußere Stirnfläche}} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{an der Oberfläche eines Leiters} \quad (17.4-7)$$

Die elektrostatische Feldstärke an der Oberfläche eines Leiters ist proportional zur örtlichen Flächenladungsdichte σ unter der Leiteroberfläche.⁸

Die folgenden drei Beispiele berechnen elektrische Felder von Ladungsverteilungen.



Beispiel 17.4-3 Elektrische Felder von geladenen Kugeln

Eine leitende Kugel mit Radius r_{Kugel} wird mit der Ladung Q aufgeladen. Die Elementarladungen sammeln sich dicht unter der Kugeloberfläche, so dass das Innere der Kugel ladungsfrei ist.

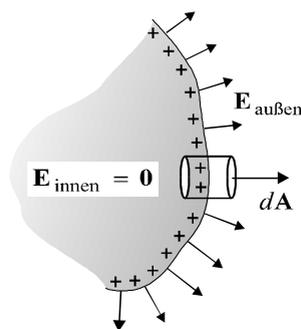


Abb. 17.4-3 Φ_E wird für eine kleine Dose berechnet, deren Stirnflächen parallel zum elektrischen Außenfeld sind. Der Gaußsche Satz liefert $E = \sigma/\epsilon_0$.

⁸ Die elektrischen Felder in Gl. (17.3-11) und (17.4-7) unterscheiden sich um einen Faktor 0,5. Der Grund dafür wird in Aufgabe 17-7 genannt.

Berechne das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ mit dem Gaußschen Satz

a) außerhalb der leitenden Kugel ($r \geq r_{\text{Kugel}}$)

b) innerhalb der leitenden Kugel ($r < r_{\text{Kugel}}$).

c) Jetzt wird eine *nichtleitende*, massive Kugel mit der Ladung Q *homogen* aufgeladen. Die Ladungsträger sind jetzt mit konstanter Ladungsdichte ρ im ganzen Kugelvolumen verteilt.

Berechne auch hier das elektrische Feld außerhalb und innerhalb der nichtleitenden Kugel.

Lösung:

a) Die Ladungen der leitenden Kugel sammeln sich direkt unter der Kugeloberfläche. Ihre Verteilung muss kugelsymmetrisch sein, da andernfalls eine Richtung im Raum ausgezeichnet wäre. Daher muss auch das elektrische Feld kugelsymmetrisch sein:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \cdot \mathbf{e}_r$$

mit \mathbf{e}_r = Einheitsvektor in radiale Richtung.

Die Integration zur Berechnung des Flusses Φ_E ist nur dann *einfach* durchzuführen, wenn die Integrationsfläche die Symmetrie des elektrischen Feldes wiedergibt. Daher muss eine konzentrische Kugel als Integrationsfläche A_{Int} gewählt werden.

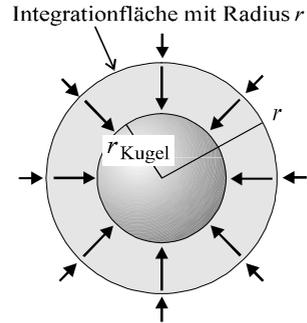


Abb. 17.4-4 Um die Metallkugel wird eine konzentrische, kugelförmige Integrationsfläche gelegt.

$$\oint_{A_{\text{Int}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_{\text{Int}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \stackrel{E = \text{const auf der Integrationsfläche}}{=} E(r) \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Kugelförmige Integrationsfläche}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{im Außenraum einer leitenden Kugel} \quad (17.4-8)$$

Beachte: Das elektrische Feld außerhalb der leitenden Kugel ist genauso groß wie das elektrische Feld einer Punktladung Q im Kugelmittelpunkt. Allgemein gilt: Alle kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen haben im Außenraum das elektrische Feld nach Gl. (17.4-8), wobei Q die Gesamtladung ist. Der Beweis dieser Aussage sieht wegen $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \cdot \mathbf{e}_r$ genauso aus wie der Beweis von Gl. (17.4-8).

b) Als Integrationsfläche wählen wir erneut eine konzentrische Kugel; der Radius r ist jetzt aber kleiner als r_{Kugel} .

$$\oint_{A_{\text{Int}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_{\text{Int}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \stackrel{E = \text{const auf der Integrationsfläche}}{=} E(r) \cdot 4\pi r^2 \stackrel{\text{Die Integrationsfläche enthält keine Ladung.}}{=} 0$$

$$\Rightarrow E(r) = 0 \quad \text{im Innern einer leitenden Kugel} \quad (17.4-9)$$

Das Innere einer leitenden Kugel ist also nicht nur ladungsfrei, sondern auch stets feldfrei – in Übereinstimmung mit allgemeinen, früheren Überlegungen.

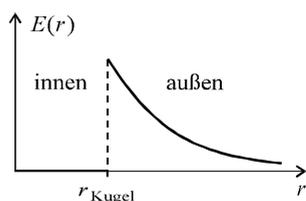


Abb. 17.4-5 Elektrisches Feld einer leitenden Kugel im Abstand r vom Kugelmittelpunkt.

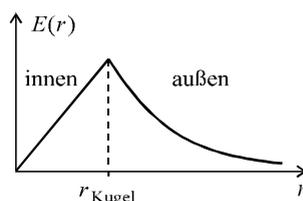


Abb. 17.4-6 Elektrisches Feld einer homogen geladenen, nichtleitenden Kugel.

c) Das Außenfeld der homogen geladenen, *nicht leitenden* Kugel wird ebenfalls durch Gl. (17.4-8) beschrieben. Das Innenfeld wird ebenfalls mit einer konzentrischen Kugel berechnet:

$$\oint_{A_{\text{Int}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_{\text{Int}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ E = \text{const auf der} \\ \text{Integrationsfläche} \end{matrix} \quad E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{r_{\text{Kugel}}^3}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{Kugel}}^3} r \quad \text{im Innern einer homogen geladenen Kugel} \quad (17.4-10)$$

Im Innern einer homogen geladenen Kugel steigt das elektrische Feld linear an. Nur die Ladungen, deren Abstand zum Kugelmittelpunkt kleiner als r ist, tragen zum Feld $E(r)$ bei.

Bemerkung: Coulombkraft und Gravitationskraft haben die gleiche Form. Daher ist die Erdanziehungskraft im Erdinnern proportional zur Entfernung vom Erdmittelpunkt, wenn man – in Gedanken – einen Tunnel zum Erdmittelpunkt gräbt. (Dabei wird eine homogene Massendichte im Erdinnern vorausgesetzt.) Diese Aussage haben wir in der Mechanik in Aufgabe „7-21 Schwingung nach Australien und zurück“ benötigt.

Beispiel 17.4-4 Elektrisches Feld eines langen, geladenen Leiters oder Zylinders

Berechne das elektrische Feld eines langen, geraden Leiters oder eines langen Zylinders, der auf der z -Achse liegt und homogen mit konstanter Längladungsdichte $\lambda := Q/l$ geladen ist.

Hinweis: Der Leiter bzw. der Zylinder soll sehr lang sein, damit die Inhomogenitäten des elektrischen Feldes an den zwei Enden vernachlässigt werden können.

Lösung:

Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld rotationssymmetrisch um den Leiter sein:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \cdot \mathbf{e}_r \quad \text{mit } \mathbf{e}_r = \text{Einheitsvektor in radiale Richtung.}$$

Daher ist es sinnvoll, die Oberfläche eines Zylinders mit Radius r und Länge l , dessen Symmetrieachse auf dem Leiter liegt, als Integrationsfläche zu wählen.

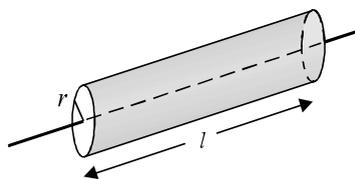


Abb. 17.4-7 Wir integrieren über einen konzentrischen Zylindermantel mit Länge l und Radius r .

$$\oint_{A_{\text{Zylinder}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_{\text{Zylinder}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{E steht senkrecht auf den Normalen-} \\ \text{vektoren der zwei Grundflächen}}}{=} \int_{A_{\text{Mantel}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} =$$

$$= \int_{A_{\text{Mantel}}} E(r) dA = E(r) \underbrace{2\pi r l}_{\text{Mantelfläche}} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{im Außenraum eines langen, homogen geladenen Zylinders (17.4-11)}$$

Beispiel 17.4-5 Feld einer homogen geladenen, sehr großen, ebenen, dünnen Platte

Eine ebene, sehr großflächige, dünne Platte ist homogen mit konstanter Flächenladungsdichte $\sigma := Q/A$ geladen. Berechne das elektrische Feld mit dem Gaußschen Satz.

Hinweis: Die Platte soll sehr großflächig sein bzw. das Feld soll in einer Entfernung von der Platte berechnet werden, die wesentlich kleiner ist als Breite und Höhe der Platte. Dann können die Inhomogenitäten des elektrischen Feldes an den Plattenrändern vernachlässigt werden.

Lösung:

Nach früheren Überlegungen in diesem Abschn. 17.4 muss das elektrische Feld senkrecht zur Platte stehen.

Wegen der homogenen Flächenladung und der (theoretisch) unendlichen Ausdehnung der Platte ist kein Punkt auf der Platte ausgezeichnet. Daher darf sich das elektrische Feld nicht ändern, wenn wir uns parallel zur Platte bewegen – mit konstantem Abstand zur Platte. Das Feld kann also nur von der Entfernung r zur Platte abhängen – wenn überhaupt.

Wir wählen als Integrationsfläche die Oberfläche eines Quaders mit den Maßen $a, b, 2r$. Die beiden Stirnflächen der Größe $a b$ haben denselben Abstand r von der geladenen Platte, damit der Betrag $E(r)$ auf beiden Flächen mit Sicherheit gleich groß ist. Ein Fluss tritt nur in den beiden Stirnflächen $a b$ auf.

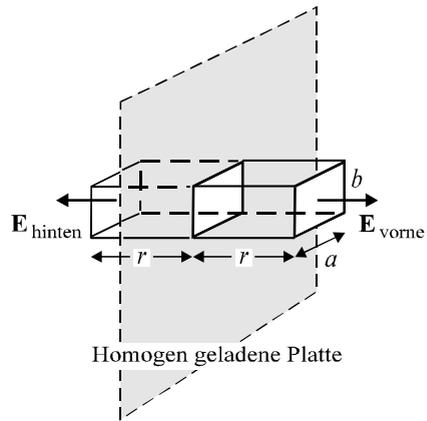


Abb. 17.4-8 Homogen geladene, große, ebene Platte.

$$\oint_{A_{\text{Quader}}} \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{A} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{E steht senkrecht} \\ \text{auf den Seitenflächen}}}{=} \int_{A_{\text{Stirnflächen}}} \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{A} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{E ist parallel zu den} \\ \text{Flächennormalen der Stirnflächen}}}{=} \int_{A_{\text{Stirnflächen}}} E(r) dA \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ E_{\text{vorne}} = E_{\text{hinten}}}}{=} E(r) 2ab = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma ab}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \quad \text{für eine dünne, homogen geladene Platte} \quad (17.4-12)$$

Bemerkungen: **1)** In Aufgabe 17-7 wird anschaulich erklärt, warum die Feldstärke hier nur halb so groß ist wie in Gl. (17.4-7). **2)** Natürlich stimmt Gl. (17.4-12) mit Gl. (17.3-11) überein.

Die letzten drei Beispiele zeigen drei verschiedene Abstandsgesetze:

$$E(r) \sim 1/r^2 \quad \text{bei einer homogen geladenen Kugel}$$

$$E(r) \sim 1/r \quad \text{bei einem homogen geladenen, langen Leiter}$$

$$E(r) = \text{const} \quad \text{bei einer homogen geladenen, großflächigen Platte}$$

Mit dem Gaußschen Satz lassen sich diese Abstandsgesetze leicht begründen: Die Integrationsflächen, die in den drei Beispielen einen Beitrag zum Fluss liefern, sind proportional zu r^2 , r und r^0 .

Wir kommen nochmals kurz auf Beispiel 17.4-3 zurück. Danach beträgt die elektrische Feldstärke auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R , die kugelsymmetrisch mit der Ladung Q aufgeladen ist,

$$E_0 = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R^2}$$

d. h. auf der Oberfläche von kugelsymmetrisch geladenen Kugeln wächst die Feldstärke mit abnehmendem Krümmungsradius R stark an. Diese Aussage kann verallgemeinert werden: *Bei leitenden Körpern mit beliebig geformter Oberfläche sind die Feldstärke und damit nach Gl. (17.4-7) auch die Flächenladungsdichte σ an Stellen starker Krümmung besonders groß. Vor allem an Leiterspitzen mit kleinen Radien treten hohe elektrische Feldstärken auf.*

Hohe Feldstärken können Elektronen aus Leiterspitzen „herausziehen“; man spricht von **Feldemission**. (Genau genommen ist die Feldemission ein quantenmechanischer Tunneleffekt.) Bei Metallspitzen mit einem Krümmungsradius von etwa $1 \mu\text{m}$ kann schon eine Spannung von einigen hundert Volt Elektronen aus dem Metall herausziehen. So entstehen *nahezu punktförmige Elektronenquellen*.

Hohe Feldstärken können aber nicht nur Elektronen aus Leitern herausziehen, sondern in der Luft ab etwa 3 MV/m (in anderen Stoffen teilweise bei wesentlich höheren Feldstärken) einen **Durchschlag** auslösen. Luft enthält immer eine kleine Menge von Ionen, die z. B. durch kosmische Strahlung erzeugt werden. In starken elektrischen Feldern werden die Ionen gewaltig beschleunigt. Bei heftigen Zusammenstößen mit Luftmolekülen können Elektronen aus den Atomen herausgeschlagen werden, so dass zahlreiche weitere Ionen entstehen, die den Prozess verstärken. Elektronen können aber auch auf höhere Bahnen gehoben werden, so dass die Atome beim Rücksprung der Elektronen Licht abstrahlen.

Anwendungen des Durchschlags:

1. Durchschläge mit kleinen Funken können auftreten, wenn man in sehr *trockenen* Räumen über einen Teppich läuft und danach z. B. eine metallische Türklinke berührt. (Feuchte Luft leitet Ladungen, die sich auf hohem Potential befinden, ab und verhindert so das unangenehme Ereignis.)

2. An den spitzen Enden von Blitzableitern treten beim Gewitter hohe Feldstärken auf, so dass der Blitz dort einschlägt. Zur Vermeidung von Durchschlägen dürfen Hochspannungsanlagen keine scharfen Kanten und keine Spitzen enthalten.

17.5 Kopierer und Laserdrucker *

Eine wichtige Anwendung haben die elektrostatischen Kräfte in Kopierern und Laserdruckern. Das Verfahren basiert auf fotoelektrischen Eigenschaften mancher Halbleiter⁹ (z. B. Selen) sowie auf der elektrostatischen Abscheidung von positiv geladenem Staub (Tonerpartikeln) auf negativ geladenen Flächen. Der wichtigste Teil des Kopierers ist ein rotierender, mit Selen beschichteter Aluminiumzylinder, der geerdet ist und Fototrommel oder Bildtrommel heißt.

Selen ist ein lichtelektrischer Halbleiter, also ein Festkörper, der bei Dunkelheit ein elektrischer Isolator und bei Licht elektrisch leitend ist.

Die Lichtquanten (Photonen) werden im Halbleiter absorbiert und übergeben ihre Energie an Elektronen, die bei höherer Energie frei beweglich sind.

Der Kopierprozess läuft in acht Schritten ab, die in Abb. 17.5–1 dargestellt werden:

- 1. Aufladung:** Im Dunkeln werden Elektronen auf die Selenschicht der Fototrommel gebracht – z. B. durch eine Koronaentladung um einen dünnen Draht, an dem der negative Pol einer Hochspannung liegt. Die *Selenschicht wird negativ geladen* mit Ladungsdichten von etwa 10^{-7} C/cm^2 . Da der Halbleiter Selen im Dunkeln nicht leitet, können die Elektronen nicht abfließen.
- 2. Optische Abbildung:** Mit Hilfe von Linsen und Spiegeln wird der Halbleitermantel der *Fototrommel mit dem Bild des Originaldokumentes belichtet*. An den belichteten Stellen wird die Selenschicht auf der Trommeloberfläche elektrisch leitend, so dass die Elektronen hier auf den Aluminiumzylinder abfließen. An den dunklen Stellen leitet die Selenschicht nicht und hält die aufgetragenen Elektronen fest. *Nach der Belichtung ist das Ladungsmuster auf der Trommel ein Abbild des Originaldokumentes*.
- 3. Tonpartikel auf Trommel:** Tonerpartikel, bestehend aus Harz, Ruß und Eisenteilchen werden positiv aufgeladen und auf die Oberfläche der Entwicklerwalze gebracht. Die Walze rollt unter Druck über die Fototrommel. Durch elektrostatische Kräfte wer-

⁹ Wird einem Halbleiter Energie in Form elektromagnetischer Strahlung im Infrarotbereich oder (bei manchen Halbleitern) im sichtbaren Bereich zugeführt, so können Elektronen die Photonenergie absorbieren und dabei in das energiereichere sog. Leitungsband gelangen. Im Leitungsband sind die Elektronen frei beweglich und führen deshalb zu einer guten elektrischen Leitfähigkeit.

Man kann den Vorgang anschaulich mit einer verstopften Autobahn vergleichen: Wegen Überfüllung kommen alle Autos zum Stillstand. Wenn ein Auto mit einer von außen zugeführten Energie $m g h$ auf die Höhe h hochgehoben werden könnte, so hätte es freie Fahrt.

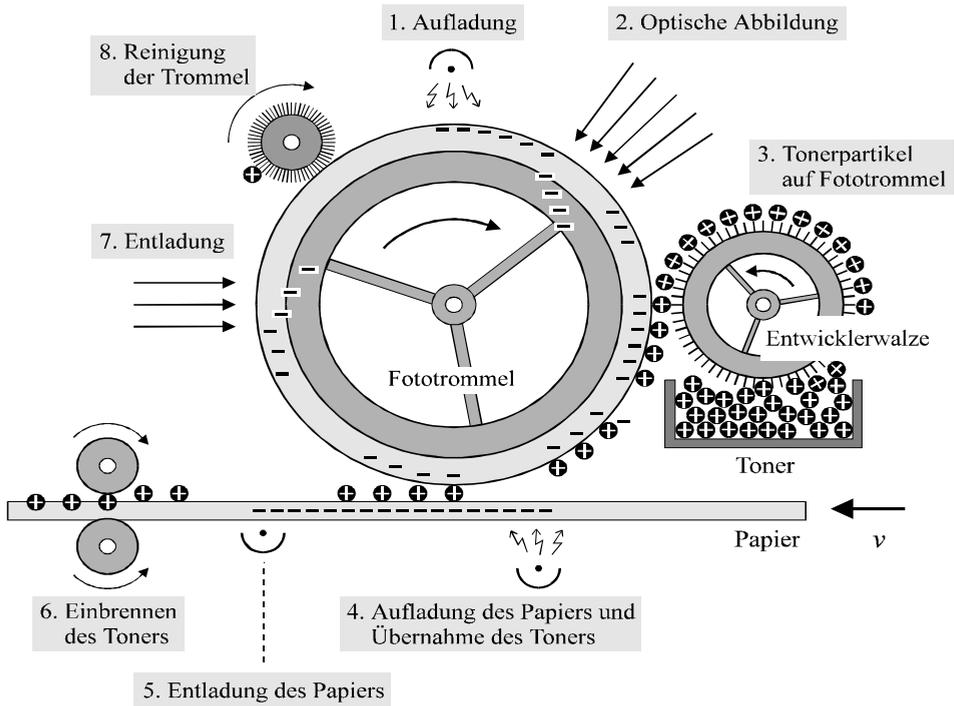


Abb. 17.5-1 Die rotierende Fototrommel ist mit einer dünnen Schicht eines lichtelektrischen Halbleiters bedeckt. Die lichtelektrische Eigenschaft des Halbleiters (z. B. Selen) ist ganz wesentlich für den Kopierprozess: Im Dunkeln sind die Halbleiter nichtleitend. Bei einer Bestrahlung aber geben die absorbierten Photonen ihre Energie an Elektronen ab, die danach aufgrund ihrer höheren Energie frei beweglich sind. Bei Bestrahlung werden lichtelektrische Halbleiter also elektrisch leitend.

den die positiven Tonerpartikel von den Elektronen, die auf den unbelichteten Stellen der Selschicht sitzen, auf die Fototrommel gezogen. Die Entwicklerwalze verwandelt das Ladungsmuster auf der Trommel in ein Schwarz-Weiß-Muster.

- 4. Aufladung des Papiers:** Das Schwarz-Weiß-Muster wird von der Fototrommel auf ein Blatt Papier übertragen. Dazu wird die Rückseite des Papiers durch eine Koronaentladung so stark negativ aufgeladen, dass das Blatt die Tonerpartikel von der Trommel zu sich herüberzieht. Nun befindet sich das Schwarz-Weiß-Muster auf dem zu bedruckenden Papier.
- 5. Entladung des Papiers:** Das Papier wird durch einen Wechselstrom-Separator entladen, der abwechselnd negative und positive Ladungen erzeugt.

Oft gelingt die Entladung nur zum Teil. In diesen Fällen ist das Papier der fertigen Kopien statisch aufgeladen, so dass die Blätter aneinander haften.

6. Einbrennen des Toners: Noch liegt der Toner verhältnismäßig lose auf dem Papier. Das bedruckte Blatt wird durch zwei entgegengesetzt rotierende, *geheizte* Rollen geführt. Der Toner schmilzt bei einer Temperatur von etwa 200°C . Harze und der farbgebende Ruß verbinden sich und haften am Papier.

Damit ist eine *dauerhafte* (und anfangs noch warme) *Kopie fertig*.

Beim dauernden Druck treten häufig unangenehme Gerüche auf; sie entstehen beim Schmelzen der Harze. Sollte einmal Tonerstaub beim Wechsel der Tonerkartusche auf die Kleidung kommen, so muss er *kalt* ausgewaschen werden. Auf keinen Fall darf man heißes Wasser verwenden, das die Harze schmelzen lässt und daher die Tonerteilchen im Gewebe festsetzt.

Abschließend wird die Fototrommel für die nächste Kopie in ihren ungeladenen und staubfreien Anfangszustand zurück versetzt:

7. Entladung: Durch Belichtung der Trommel wird das verbliebene elektrostatische Bild gelöscht, weil die Elektronen aus der belichteten und daher leitenden Selen-schicht abfließen.

8. Reinigung der Trommel: Die Trommel fährt an einer Bürste vorbei, die den restlichen, nicht abgezogenen Toner entfernt.

Jetzt ist die Fototrommel bereit für die Kopie einer neuen Seite.

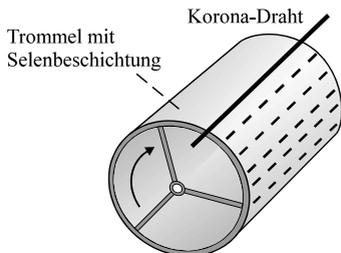


Abb. 17.5-1a Die Selen-schicht wird durch eine Koronaentladung negativ aufgeladen.

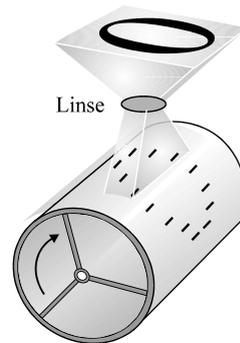


Abb. 17.5-1b Bei der Abbildung wird die Selen-schicht an den belichteten Stellen leitend.

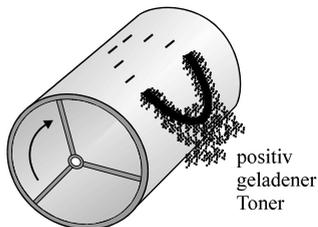


Abb. 17.5-1c Positiv geladene Tonerpartikel werden auf die Trommel gezogen.

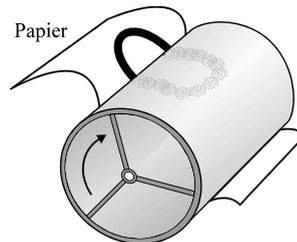


Abb. 17.5-1d Stark negativ geladenes Papier übernimmt die Tonerteilchen.

Laserdrucker sind ähnlich aufgebaut wie Fotokopierer – mit einem Unterschied: Sie tasten nicht – wie der Kopierer – eine zu kopierende Vorlage optisch ab, sondern erhalten vom Computer auf elektronischem Wege eine komplette Seite. Dann beleuchtet ein Laserstrahl, der über bewegliche Spiegel gesteuert wird, die Fototrommel.

Weitere Anwendungen der elektrostatischen Kraft:

- **Elektrostatische Staubfilter** und elektrostatische Abgasfilter: Im Abgaskamin wird mit einer Hochspannung ein sehr starkes elektrisches Feld zwischen einem Draht in der Mitte und metallischen Wänden aufgebaut; bei zylinderförmigen Wänden gilt $E(r) \sim 1/r$ (siehe Gl. (17.4–11)). Das starke Feld zündet in Drahtnähe elektrische Durchschläge in der Luft. Die frei werdenden Elektronen laufen nach außen und verbinden sich mit Sauerstoffmolekülen. Die negativen Sauerstoffmolekül-Ionen O_2^- wiederum lagern sich an die aufsteigenden Schadstoffe an.

Schadstoffe in fester Form scheiden sich an den Außenwänden ab. Sie werden regelmäßig durch Rüttelbewegungen abgelöst und fallen in Staubfangbehälter am Boden des Kamins. Flüssige Schadstoffe laufen die Kaminwände herab und werden ebenfalls unten aufgefangen.

Etwa 99% des Staubes und der Asche, die bei der Stromerzeugung in Kohlekraftwerken entstehen, können auf diese Art ausgefiltert werden.

- Weitere Anwendungen sind die elektrostatische Trennung körniger Mischungen (etwa von Getreide und Unkrautsamen) und die elektrostatische Lackierung mit Sprühfarben.

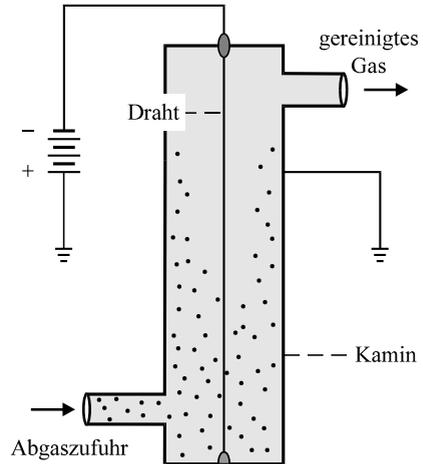


Abb. 17.5–2 Im elektrostatischen Staubfilter werden die Staubpartikel negativ aufgeladen und zur Wand abgelenkt.

17.6 Noch einmal in Kürze

1) Die Elementarladung ist die kleinste Ladung. Sie wurde 2019 auf den exakten Wert

$$e_0 = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C (exakt)} \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (17.1-1)$$

festgelegt. *Alle anderen Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung. In abgeschlossenen Systemen ist die Summe aller Ladungen konstant.*

2) Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an. Die Coulombkraft F_C einer Punktladung Q_1 auf eine Punktladung Q_0 beträgt

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} \quad (17.2-1)$$

Die Naturkonstante $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{Nm}^2)$ heißt **elektrische Feldkonstante** und muss gemessen werden.

3) Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ einer Ladungsverteilung wird mit der Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ auf eine Probeladung q definiert:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} \quad (17.3-2)$$

n Punktladungen Q_i mit den Ortsvektoren \mathbf{r}_i erzeugen am Ort \mathbf{r} das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (17.3-3)$$

Eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte $\rho = dQ/dV$ erzeugt das Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (17.3-9)$$

4) Ein elektrisches Feld lässt sich durch Feldlinien darstellen: *Die Tangenten der Feldlinien haben überall die Richtung der elektrischen Feldstärke.* Ihre Dichte wächst mit zunehmender Feldstärke. Sie beginnen bei positiven und enden bei negativen Ladungen.

5) Der Fluss Φ eines Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ durch eine Fläche A ist definiert als Flächenintegral

$$\Phi := \int_A \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \quad (17.4-2)$$

Aus dem Coulombschen Gesetz lässt sich der Gaußsche Satz mathematisch ableiten. Danach ist der Fluss des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche A gleich der Summe der eingeschlossenen Ladungen dividiert durch ϵ_0 :

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \quad (17.4-5)$$

Der **Gaußsche Satz** ist eine der vier Maxwell-Gln. Er ermöglicht bei symmetrischen Ladungsverteilungen einfache und elegante Berechnungen elektrischer Felder.

6) *In der Elektrostatik*, also bei ruhenden Ladungen, *sind alle leitenden Körper im Innern feld- und ladungsfrei.* Auch Hohlräume mit einer geschlossenen, leitenden Oberfläche sind feldfrei. Metallhüllen und engmaschige Metallnetze (Faraday-Käfige) schirmen ihr Inneres gegen elektrostatische Felder ab.

7) Im Außenraum stehen statische elektrische Felder senkrecht auf den Leiteroberflächen. Komponenten des elektrischen Feldes parallel zur Leiteroberfläche würden die Ladungen im Leiter solange verschieben, bis das elektrische Feld senkrecht auf der Oberfläche steht.

Mit dem Gaußschen Satz lässt sich das elektrische Feld auf einer Leiteroberfläche berechnen:

$$E = \sigma / \epsilon_0 \quad \text{mit} \quad \sigma := dQ/dA = \text{Flächenladungsdichte} \quad (17.4-7)$$

8) Außerhalb von rotationssymmetrischen, ansonsten aber beliebigen Ladungsdichten $\rho(r)$ ist das elektrische Feld genau so groß wie bei einer Punktladung, d.h.

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{im Abstand } r \text{ zum Zentrum einer rotationssymmetrischen Ladungsverteilung mit Gesamtladung } Q \quad (17.4-8)$$

Die Feldstärke ist bei kleinen Krümmungsradien r sehr groß. Diese Aussage lässt sich verallgemeinern: Bei leitenden Körpern mit beliebig geformter Oberfläche ist die Feldstärke an Stellen starker Krümmung (z. B. an Leiterspitzen) besonders hoch.

17.7 Aufgaben

17-1 Leicht Feldstärke im Fernfeld eines Dipols Abb. 17.7-1

Berechne das elektrische Feld $E(r)$ auf der Achse eines Dipols. Dabei ist r der Abstand zur Dipolmitte mit $r > d$.

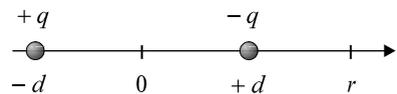


Abb. 17.7-1 Dipol mit dem Abstand $2d$ seiner beiden Ladungen.

17-2 Mittel Maximale Beschleunigung

Zwei gleiche positive Ladungen Q befinden sich bei $y = \pm d$ auf der y-Achse. Eine freie, negative Ladung $q < 0$ bewegt sich auf der x-Achse.

Bei welchen x-Koordinaten ist der Betrag $|a|$ der Beschleunigung der negativen Ladung q maximal?

17-3 Mittel Elektrisches Feld eines langen, geladenen, dünnen Leiters

In Beispiel 17.4-4 wurde das elektrische Feld eines langen, geraden, homogen geladenen Leiters, der auf der z-Achse liegt, mit dem Gaußschen Satz berechnet. Berechne das Feld nun mit Gl. (17.3-3).

17-4 Leicht Ladung der Erde

Die Erde mit Radius $r_{\text{Erde}} \approx 6380 \text{ km}$ ist von einem elektrischen Feld umgeben, das nach unten zur Erdoberfläche zeigt. In der Nähe der Erdoberfläche beträgt die Feldstärke durchschnittlich $E_{\text{OF}} \approx 130 \text{ N/C}$.

Wie groß ist die Ladung Q der Erde bei kugelsymmetrischer Ladungsverteilung?

17-5 Mittel Elektrisches Feld einer homogen geladenen Platte

Abb. 17.7-2

Eine sehr großflächige, nichtleitende ebene Platte der Dicke a steht senkrecht in der y,z-Ebene. Sie ist homogen geladen mit der konstanten Ladungsdichte $\rho = \Delta Q / \Delta V$. Berechne das elektrische Feld

- a) innerhalb der Platte
- b) außerhalb der Platte.

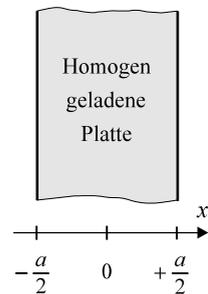


Abb. 17.7-2 Die große, Platte in der y,z-Ebene hat die Dicke a .

17-6 Mittel Kraft zwischen zwei homogen geladenen Stäben Abb. 17.7-3

Zwei gleiche, homogen geladene dünne Stäbe mit konstanter Längensladungsdichte λ und mit Länge l liegen im Abstand d auf der x-Achse.

a) Berechne das elektrische Feld $E(x)$, das der linke Stab auf der x-Achse an der Stelle x (mit $x > l$) erzeugt.

b) Berechne die Kraft, mit der sich die beiden Stäbe gegenseitig abstoßen.

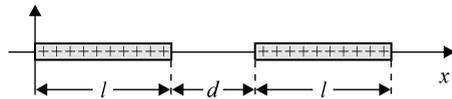


Abb. 17.7-3 Zwei homogen geladene Stäbe

17-7 Mittel Vergleich der Feldstärken von dünner und dicker ebener Platte

Nach Gl. (17.4-7) beträgt die Feldstärke an der Oberfläche von leitenden Körpern $E = \sigma / \epsilon_0$. Nach Gl. (17.4-12) ist die Feldstärke einer großflächigen, *dünnen* Platte gleich $E = \sigma / (2\epsilon_0)$, also nur halb so groß wie in Gl. (17.4-7). Kläre diesen vermeintlichen Widerspruch auf.

Hinweis: Zeichne Ladungsverteilung und Feld einer großflächigen, *dicken* Platte und vergleiche sie mit denen einer *dünnen* Platte.