2024

Abitur

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Gymnasium · Gesamts

Mathematik L

+ *Übungsaufgaben*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

PDF

STARK

Inhalt

* Der in der Aufgabe B4 behandelte Themenbereich ist nicht mehr prüfungsrelevant und wird daher nicht mehr abgedruckt.

Abiturprüfung 2021

Abiturprüfung 2022

Abiturprüfung 2023

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).

Bei **MyStark** finden Sie:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Lernvideos** zu Aufgaben aus Prüfungsteil A
- **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2017 bis 2023** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Leistungskurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2024** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2024 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben** im Stil der schriftlichen Abiturprüfung sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2020 bis 2023**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhalten Sie zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  
  – **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A
  – **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  – **Lernvideos** zu Aufgaben aus Prüfungsteil A
  – **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
  – **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2017 bis 2023**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2024 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MyStark.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Ihr Stark Verlag

Hinweise und Tipps zum Abitur 2024

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Bildung erstellt. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.
Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik besteht aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitende Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, bestehend aus Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematischen Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**.
Seit dem Abitur 2021 haben sich die zeitlichen Vorgaben für die Bearbeitung geändert. Die Aufgaben der früheren Abiturprüfungen sind inhaltlich (allerdings nicht unbedingt vom Umfang her) als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Leistungskurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

– Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule einen Satz **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben, die grundlegende mathematische Kompetenzen abfragen. Er besteht aus einem Pflicht- und einem Wahlpflichtteil.
  Der **Pflichtteil** enthält vier Aufgaben: zwei Aufgaben aus der Analysis und je eine Aufgabe aus der Vektoriellen Geometrie und der Stochastik. Alle **vier Aufgaben müssen bearbeitet** werden.
  Der **Wahlpflichtteil** enthält sechs Aufgaben: zwei aus der Analysis, zwei aus der Vektoriellen Geometrie und zwei aus der Stochastik. Die Schülerinnen und Schüler wählen ohne Einschränkungen aus diesen sechs Aufgaben **zwei Aufgaben** aus, die sie lösen.
  Insgesamt werden also im Prüfungsteil A **sechs Aufgaben** bearbeitet.
  Beim Lösen der Aufgaben darf **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.
– Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze: einen GTR-Aufgabensatz und einen CAS-Aufgabensatz. Jeder Aufgabensatz beinhaltet zwei Analysisaufgaben, eine Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und eine Stochastikaufgabe.

Die **Fachlehrkraft** stellt aus einem der beiden Aufgabensätze (GTR oder CAS) die Aufgaben für den Prüfungsteil B nach folgenden Vorgaben zusammen:
Der Prüfungsteil B wird aus **3 Aufgaben** gebildet, wobei eine **Analysisaufgabe**, die Aufgabe zur **Vektoriellen Geometrie** und die **Stochastikaufgabe** zu wählen sind.
Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B:

- GTR (grafikfähiger Taschenrechner) **oder** CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen den Schülerinnen und Schülern im Leistungskurs insgesamt **300 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit einschließlich Auswahlzeit für den Prüfungsteil A, der zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 100 Minuten. Sobald die Schülerinnen und Schüler mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können sie ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel.
Sollte der Prüfungsteil A schneller bearbeitet werden können, darf auch schon früher mit dem Prüfungsteil B begonnen werden. Dann steht für diesen entsprechend mehr Zeit zur Verfügung.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2024

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Leistungskurs** Mathematik in der **Abiturprüfung 2024** sind folgende:

Schwerpunkte und Fokussierungen	Beispiele
Funktionen und Analysis	
• Funktionen als mathematische Modelle	2022 – Aufgabe B2 (CAS)
• Fortführung der Differenzialrechnung	
– Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern	2021 – Aufgabe B1 (GTR)
– notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)	2022 – Aufgabe A3, Teilaufgabe b (1)
• Grundverständnis des Integralbegriffs	2022 – Aufgabe A, Teilaufgabe d
• Integralrechnung	2022 – Aufgabe A, Teilaufgabe c (2)

Analytische Geometrie und Lineare Algebra	
• lineare Gleichungssysteme	2020 – Aufgabe B3 (GTR/CAS), Teilaufgabe c (2)
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte	2022 – Aufgabe B3 (GTR/CAS)
• Lagebeziehungen und Abstände	2022 – Aufgabe B3 (GTR/CAS)
• Skalarprodukt	2022 – Aufgabe A3, Teilaufgabe e
Stochastik	
• Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	2021 – Aufgabe A3, Teilaufgabe f
• Binomialverteilung und Normalverteilung	2022 – Aufgabe B4 (GTR/CAS)
• Testen von Hypothesen	2022 – Aufgabe B4 (GTR/CAS)

3 Leistungsanforderung und Bewertung

Im Leistungskurs beläuft sich die Höchstpunktzahl für den **Prüfungsteil A** (ohne Hilfsmittel) auf **30 Punkte** und für den **Prüfungsteil B** (mit Hilfsmitteln) auf **90 Punkte** (Analysis 40 Punkte, Vektorielle Geometrie und Stochastik jeweils 25 Punkte). Insgesamt können **120 Punkte** erreicht werden.

Die Bewertung der Klausuraufgaben erfolgt auf der Grundlage eines der Aufgabenstellung beigefügten Bewertungsschemas. Darin sind Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Das Bewertungsschema ist Grundlage der Beurteilung. Von der Modelllösung abweichende Lösungen werden entsprechend bewertet, die für die Aufgabenstellung vorgesehene Höchstpunktzahl kann aber nicht überschritten werden. Ferner können nur ganze Punktzahlen vergeben werden. Ausschlaggebend ist hier die fachliche Richtigkeit und Vollständigkeit.

Ein weiteres wichtiges Bewertungskriterium ist die Darstellungsleistung, in welche der richtige Einsatz der Fachsprache und die Strukturiertheit der Ausführungen einfließen. Die Bewertung der Darstellungsleistung wird in die Bewertung der inhaltlichen Leistungen integriert. Punktabzug aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (Rechtschreibung und Grammatik) kann im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen erfolgen.

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung
Prüfungsteil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel

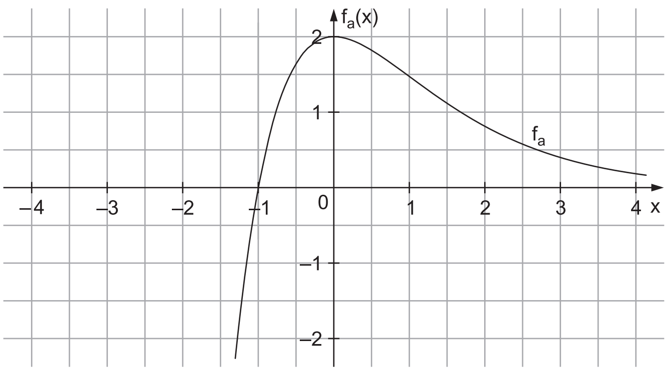
Pflichtteil

a) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen
$f(x) = 3x^2 - 12x + 9,\ x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = -3x + 9,\ x \in \mathbb{R}$.

(1) Ermitteln Sie, an welcher Stelle x die Graphen der Funktionen f und g die gleiche Steigung besitzen.

(2) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g begrenzt wird.

b) Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung
$f_a(x) = (ax + 2) \cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ und dem Parameter $a \neq 0$. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion dieser Schar.



(1) Bestimmen Sie den zum abgebildeten Graphen der Funktion f_a zugehörigen Parameter a.

(2) Weisen Sie rechnerisch nach, dass alle Graphen der Funktionenschar f_a an der Stelle $x_0 = \frac{a-2}{a}$ eine waagrechte Tangente besitzen.

c) Gegeben sind die Punkte $A(-6|8|7)$ und $B(-2|10|3)$ sowie die Ebene
$E\colon 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

(1) Zeigen Sie, dass der Punkt A in der Ebene E liegt und der Vektor $\overrightarrow{AB}$ senkrecht zur Ebene E steht.

(2) Der Punkt B wird an der Ebene E gespiegelt.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes.

Wahlpflichtteil

e) Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = (x-k) \cdot e^x$, $k \in \mathbb{R}$.
Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $f_k''(x) = (x-k+2) \cdot e^x$

(1) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Funktionenschar f_k den Tiefpunkt $T_k(k-1 \mid -e^{k-1})$ haben.

(2) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Ortslinie, auf der alle Tiefpunkte T_k der Funktionenschar f_k liegen.

f) Gegeben ist die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 2e^{-x}$, $x \geq 0$.

(1) Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Funktion g.
Geben Sie begründet an, welche Abbildung dies ist.

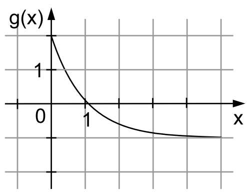


Abbildung 1

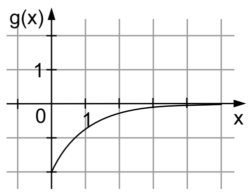


Abbildung 2

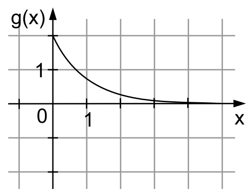


Abbildung 3

(2) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die unbegrenzte Fläche, die der Graph der Funktion g mit den Koordinatenachsen einschließt, einen endlichen Flächeninhalt besitzt.

g) In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene E: $x_1 + 2x_2 - x_3 + 4 = 0$ sowie die Punkte $A(3 \mid 1 \mid 3)$ und $B_a(a \mid a \mid 2a)$, $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

(1) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen.

(2) Die Gerade g_a verläuft durch die Punkte A und B_a.
Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Gerade g_a parallel zur Ebene E verläuft, und geben Sie die zugehörige Geradengleichung an.

h) Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(3 \mid 0 \mid 6)$, $C(4 \mid 6 \mid 8)$ und $D(1 \mid 6 \mid 2)$.

(1) Zeigen Sie, dass es sich bei dem Viereck ABCD um ein Parallelogramm handelt.

(2) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass der Punkt $F(1 \mid 1 \mid 2)$ innerhalb des Parallelogramms ABCD liegt.

Hinweise und Tipps

Pflichtteil

Teilaufgabe a

(1) Geben Sie die Steigung des Graphen der Funktion f mithilfe der 1. Ableitung an.

Beachten Sie, dass der Graph der Funktion g eine Gerade ist. Überlegen Sie sich, welche Steigung die Gerade besitzt.

Gesucht ist die Stelle x, an der der Funktionsterm der 1. Ableitung von f mit der Steigung der Geraden übereinstimmt.

(2) Bestimmen Sie die Schnittstellen der Graphen der beiden Funktionen.

Stellen Sie einen Term für die Differenzfunktion von f und g auf.

Integrieren Sie über die Differenzfunktion. Die Integrationsgrenzen sind die Schnittstellen.

Achten Sie darauf, dass eine Fläche keinen negativen Flächeninhalt besitzen kann.

Teilaufgabe b

(1) Lesen Sie die Koordinaten eines Punktes des Graphen aus der Abbildung ab.

Bestimmen Sie durch Einsetzen der Koordinaten dieses Punktes in die Funktionsgleichung den Parameter a.

Beachten Sie, dass nicht alle Punkte des Graphen hierfür geeignet sind.

Oder

Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die Nullstelle von f_a.

Vergleichen Sie die berechnete Nullstelle mit dem abgebildeten Graphen.

(2) Überlegen Sie, welche Steigung eine waagrechte Tangente besitzt.

Bestimmen Sie die Ableitung von f_a mithilfe der Ketten- und Produktregel.

Berechnen Sie die Stelle, an der die Steigung gleich null ist, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem vorgegebenen Wert.

Oder

Berechnen Sie den Wert der 1. Ableitungsfunktion von f_a an der vorgegebenen Stelle.

Teilaufgabe c

(1) Setzen Sie die Koordinaten von A in die Koordinatenform der Ebene E ein und prüfen Sie, ob eine wahre Aussage entsteht.

Ein Vektor steht senkrecht auf einer Ebene, wenn der Vektor und der Normalenvektor der Ebene kollinear sind.

Zwei Vektoren sind kollinear, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.

Lösung

Pflichtteil

a) (1) Die 1. Ableitung von f gibt die Steigung des Graphen der Funktion f an.

$f'(x) = 6x - 12$

Der Graph der Funktion g ist eine Gerade mit der Steigung $m = -3$.

Durch Gleichsetzen des Funktionsterms der 1. Ableitung von f mit der Steigung der Geraden g ergibt sich:

$$\begin{aligned} 6x - 12 &= -3 \quad && \mid +12 \\ 6x &= 9 && \mid :6 \\ x &= 1{,}5 \end{aligned}$$

An der Stelle $x = 1{,}5$ besitzen die Graphen von f und g die gleiche Steigung.

(2) Zur Berechnung des Inhalts der von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossenen Fläche werden die Schnittstellen von f und g bestimmt. Diese ergeben sich durch Gleichsetzen der Funktionsterme.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 9 &= -3x + 9 \quad && \mid +3x - 9 \\ 3x^2 - 9x &= 0 \\ 3x \cdot (x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt wird null, wenn wenigstens ein Faktor null ist.

$x_1 = 0$ oder $x_2 = 3$

Zur Berechnung des Flächeninhalts wird über die Differenzfunktion integriert. Diese lautet:

$d(x) = f(x) - g(x) = 3x^2 - 12x + 9 - (-3x + 9) = 3x^2 - 9x$

Da Flächen immer positiv sind, wird der Betrag benötigt.

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^3 d(x)\,dx \right| \\ &= \left| \int_0^3 (3x^2 - 9x)\,dx \right| \\ &= \left| \left[x^3 - \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 \right| \\ &= \left| 27 - \frac{81}{2} - 0 \right| \\ &= |\,27 - 40{,}5\,| \\ &= |-13{,}5| \\ &= 13{,}5\,[\text{FE}] \end{aligned}$$

Statt den Betrag zu verwenden, kann auch mithilfe geeigneter Funktionswerte, z. B. $f(1)$ und $g(1)$, festgestellt werden, dass der Graph der Funktion g zwischen den Integrationsgrenzen oberhalb des Graphen von f verläuft. Wird als Differenzfunktion nicht $f(x)-g(x)$, sondern $g(x)-f(x)$ gewählt, ergibt sich bei der Integration auch ohne Berücksichtigung des Betrags ein positiver Wert.

b) (1) Da unabhängig vom Parameter a die Graphen aller Funktionen der Schar durch den Punkt $S(0|2)$ verlaufen, führt das Einsetzen der Koordinaten dieses Punktes zwar zu einer wahren Aussage, der gesuchte Parameter a kann dadurch aber nicht bestimmt werden:

$2=(a\cdot 0+2)\cdot e^{-0}$

$2=2$

Zur Bestimmung von a muss ein anderer Punkt des Graphen herangezogen werden.

Der Punkt $N(-1|0)$ ist ein Punkt des Graphen und erfüllt somit die Funktionsgleichung. Durch Einsetzen der Koordinaten dieses Punktes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0&=f(-1)\\
0&=(a\cdot(-1)+2)\cdot e^{-(-1)}\\
0&=(-a+2)\cdot e^{1} && |:e^{1}\\
0&=-a+2 && |+a\\
a&=2
\end{aligned}$$

Alternativ durch Berechnung der Nullstelle der Funktion f_a:

$$\begin{aligned}
f_a(x)&=0\\
(ax+2)\cdot e^{-x}&=0 && |:e^{-x}\neq 0\\
ax+2&=0 && |-2\\
ax&=-2 && |:a\neq 0\\
x&=-\frac{2}{a}
\end{aligned}$$

Der in der Abbildung dargestellte Graph schneidet die x-Achse bei $x=-1$. Gleichsetzen führt zu:

$$\begin{aligned}
-1&=-\frac{2}{a} && |\cdot(-a)\\
a&=2
\end{aligned}$$

Der zum abgebildeten Graphen zugehörige Parameter lautet $a=2$.

(2) Eine waagrechte Tangente hat die Steigung null.

Die 1. Ableitung von f_a wird mithilfe der Ketten- und Produktregel bestimmt:

$f_a'(x)=a\cdot e^{-x}+(ax+2)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}\cdot(-ax+a-2)$

Wahlpflichtteil

e) (1) Eine Ableitung mithilfe der Produktregel ergibt:

$f_k'(x) = e^x + (x-k)\cdot e^x = (x-k+1)\cdot e^x$

Notwendige Bedingung für eine Extremstelle: $f_k'(x) = 0$

$(x-k+1)\cdot e^x = 0$

Ein Produkt wird null, wenn wenigstens ein Faktor null ist.

Wegen $e^x \neq 0$ muss gelten:

$x-k+1 = 0 \quad |+k-1$

$x = k-1$

Hinreichende Bedingung für eine Extremstelle: $f_k'(x) = 0 \wedge f_k''(x) \neq 0$

$f_k''(k-1) = (k-1-k+2)\cdot e^{k-1} = e^{k-1} > 0 \Rightarrow$ Minimum

Für die y-Koordinate gilt:

$f_k(k-1) = (k-1-k)\cdot e^{k-1} = -e^{k-1}$

Alle Graphen der Funktionenschar f_k haben den Tiefpunkt $T_k(k-1\,|\,-e^{k-1})$.

(2) Für alle Tiefpunkte T_k gilt:

$x = k-1$ und $y = -e^{k-1}$

Einsetzen von $k-1 = x$ in y liefert:

$y = -e^x$

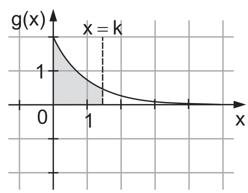
f) (1) Die e-Funktion nimmt nur positive Werte an. Es gilt:

$g(x) = 2e^{-x} > 0$

Der Funktionsgraph von g verläuft nur oberhalb der x-Achse. Daher zeigt Abbildung 3 den Graphen der Funktion g.

(2) Um den Flächeninhalt zu ermitteln, muss eine Stammfunktion G von g bestimmt werden:

$G(x) = -2\cdot e^{-x}$



Der Graph der Funktion g verläuft oberhalb der x-Achse. Der Flächeninhalt, den der Graph der Funktion g mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x = k$, $k > 0$ einschließt, lässt sich durch folgendes bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^k g(x)\,dx = \int_0^k 2e^{-x}\,dx = [-2e^{-x}]_0^k = -2e^{-k} - (-2\cdot e^{-0}) = -2e^{-k} + 2$$

Abiturprüfung 2022 Mathematik Leistungskurs (Nordrhein-Westfalen)
Prüfungsteil B – Analysis B1 (CAS)

Punkte

a) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung
$f(x) = 9 \cdot (x-3) \cdot e^{-1{,}5 \cdot (x-3)}$, $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f ist in Abbildung 1 dargestellt.

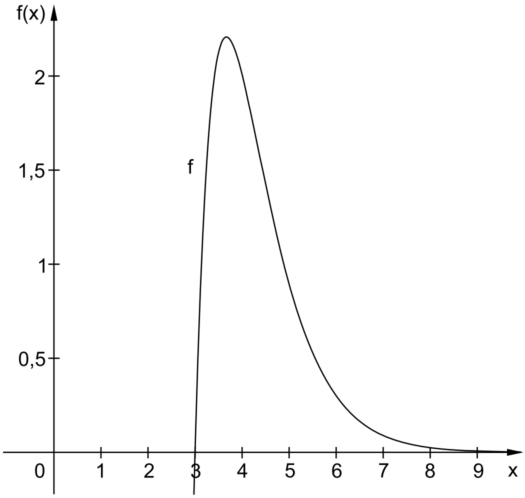


Abbildung 1

(1) Der Graph der Funktion f hat genau einen Schnittpunkt N mit der x-Achse und genau einen Hochpunkt H.
Geben Sie die Koordinaten von N an.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes H. 3

(2) Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 7$ schließen eine Fläche ein.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. 2

(3) Geben Sie den Wert von $\int_3^w f(x)\,dx$ für $w \to \infty$ und die geometrische Bedeutung dieses Wertes an. 2

(4) Für jedes $3 < u \leq 9$ sind $N(3|0)$, $P(9|0)$ und $Q_u(u|f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks.
   (i) Begründen Sie, dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks NPQ_u in Abhängigkeit von u mit der Gleichung $A_{NPQ_u}(u) = 3 \cdot f(u)$ berechnen lässt.

(ii) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, für welchen Wert von u der Flächeninhalt des Dreiecks NPQ_u maximal wird.

(iii) Bestimmen Sie alle Werte von u, für die das Dreieck NPQ_u einen Flächeninhalt von 4 Flächeneinheiten hat. 6

b) Für ein z mit $\frac{11}{3} < z < \frac{13}{3}$ ist der Punkt $R(z\,|\,f(z))$ gegeben. Der Graph der Funktion t ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt R. Für $x < z$ wird der Graph von f betrachtet. Für $x \geq z$ wird der Graph von t betrachtet. Abbildung 2 veranschaulicht diese Situation für das Beispiel $z = 3{,}9$.
Die betrachteten Graphen der Funktionen f und t schließen mit der x-Achse die in Abbildung 2 grau dargestellte Fläche ein. Der Wert von z kann mithilfe der folgenden Bedingungen so bestimmt werden, dass diese Fläche einen Flächeninhalt von 4 Flächeneinheiten hat:

I: $t(z) = f(z)$

II: $t'(z) = f'(z)$

III: $\int\limits_3^z f(x)\,dx + \int\limits_z^c t(x)\,dx = 4$, wobei c die Nullstelle von t ist.

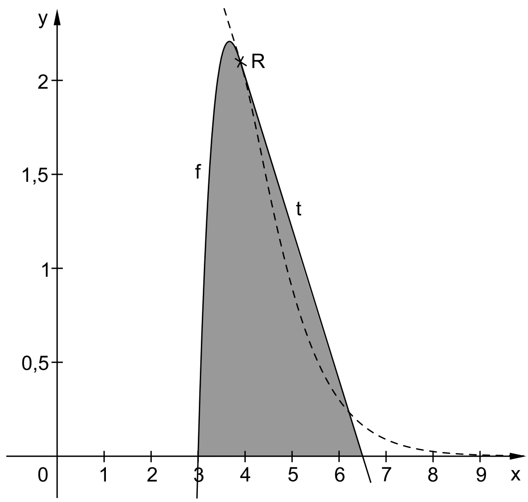


Abbildung 2

(1) (i) Begründen Sie die Wahl der Bedingungen I und II.

(ii) Erläutern Sie die linke Seite der Gleichung in Bedingung III. 4

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe a

(1) Lesen Sie den Schnittpunkt aus der Abbildung ab.

Oder

Im Schnittpunkt des Graphen der Funktion mit der x-Achse ist der Funktionswert gleich null.

Ein Funktionsterm nimmt den Wert null an, wenn wenigstens ein Faktor gleich null ist.

Beachten Sie, dass $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Bestimmen Sie das Maximum durch Analyse des Graphen mithilfe des CAS.

Oder

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist $f'(x) = 0$, die hinreichende Bedingung für eine Maximumstelle $f'(x) = 0$ und an der möglichen Extremstelle tritt ein (+/–)-Vorzeichenwechsel auf.

(2) Beachten Sie, dass der Graph der Funktion oberhalb der x-Achse verläuft.

Entnehmen Sie Abbildung 1 oder aus Teilaufgabe a (1) die untere Integrationsgrenze.

Berechnen Sie das bestimmte Integral mit dem CAS.

(3) Berechnen Sie den Grenzwert mit dem CAS.

Beschreiben Sie, welche Fläche durch das Integral angegeben wird.

(4) (i) Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundseite g und der Höhe h berechnet sich nach der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

Wählen Sie als Grundseite des Dreiecks die Strecke $\overline{NP}$ und als Höhe des Dreiecks die Lotstrecke von Q_u auf die x-Achse.

(ii) Beachten Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks dem Dreifachen des Funktionswertes der Funktion f an der Stelle $x = u$ entspricht.

Überlegen Sie, was dies für das Maximum des Flächeninhalts bedeutet.

(iii) Setzen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks und den vorgegebenen Flächeninhalt gleich und lösen Sie die Gleichung mit dem CAS.

Teilaufgabe b

(1) (i) Vergleichen Sie die Bedingungen I und II mit Abbildung 2 im Punkt R.

(ii) Unterteilen Sie die graue Fläche in Abbildung 2 durch das Lot von R auf die x-Achse.

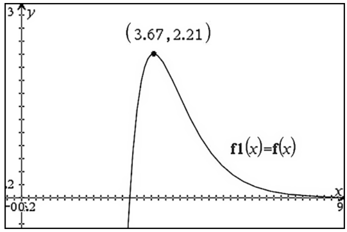
Vergleichen Sie die Flächeninhalte der Teilflächen mit dem Term auf der linken Seite der Gleichung.

Lösung

a) (1) Der Schnittpunkt kann direkt aus der Abbildung abgelesen werden. Er hat die Koordinaten $N(3\,|\,0)$.

Alternativ:
Im Schnittpunkt des Graphen der Funktion mit der x-Achse ist der Funktionswert gleich null. Da $e^{-1{,}5\cdot(x-3)} \neq 0$ ist, nimmt der Funktionsterm den Wert null an, wenn der Faktor $(x-3)$ gleich null ist. Das ist für $x=3$ der Fall.
Der Schnittpunkt mit der x-Achse hat die Koordinaten $N(3\,|\,0)$.

Eine grafische Bestimmung des Maximums der Funktion f mithilfe des CAS ergibt:
Der Hochpunkt H hat die Koordinaten $H(3{,}67\,|\,2{,}21)$.



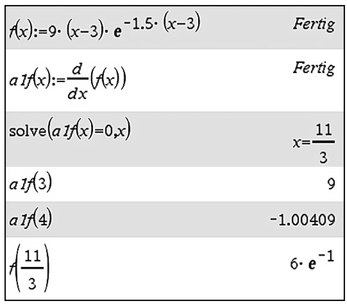
Alternativ:
Die Berechnung der Koordinaten des Hochpunktes erfolgt im Berechnungsmodus exakt.

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist $f'(x)=0$:

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{11}{3}$$

Die hinreichende Bedingung für eine Maximumstelle lautet $f'(x)=0$ und an der möglichen Extremstelle tritt ein (+/–)-Vorzeichenwechsel auf:
$f'(3)=9>0$

$f'(4)\approx -1{,}004<0$



Die Koordinaten des Hochpunkts erhält man durch Einsetzen in f:

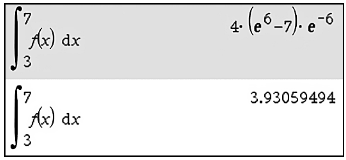
$$f\left(\frac{11}{3}\right)=\frac{6}{e}$$

Der Hochpunkt H hat die Koordinaten $H\left(\frac{11}{3}\,\middle|\,\frac{6}{e}\right)$.

(2) Nach Teilaufgabe a (1) gibt es genau einen Schnittpunkt des Graphen der Funktion f mit der x-Achse. Da die Fläche oberhalb der x-Achse liegt, entspricht der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f im Intervall [3; 7] dem Wert des Integrals im Intervall [3; 7].

$$\int_3^7 f(x)\,dx = 4 \cdot (e^6 - 7) \cdot e^6 \approx 3{,}93$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt etwa 3,93 Flächeneinheiten.



(3) Es gilt:

$$\lim_{w \to \infty}\left(\int_3^w f(x)\,dx\right) = 4$$

Die ins Unendliche reichende Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse hat einen Flächeninhalt von 4 Flächeneinheiten.

(4) (i) Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundseite g und der Höhe h berechnet sich nach folgender Formel:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Wählt man als Grundseite des Dreiecks die Strecke $\overline{NP}$, so ist die Länge gleich der Differenz der x-Koordinaten:
9 LE − 3 LE = 6 LE

Die Höhe des Dreiecks entspricht der Lotstrecke von Q_u auf die x-Achse. Die Länge entspricht also dem Funktionswert f(u). Somit gilt:

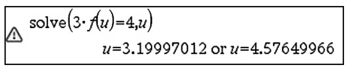
$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot f(u) = 3 \cdot f(u)\,[FE]$$

(ii) Der Flächeninhalt des Dreiecks entspricht dem Dreifachen des Funktionswertes der Funktion f an der Stelle $x = u$. Da die Funktion f ihr absolutes Maximum an der Stelle $x = \frac{11}{3}$ annimmt, wird der Flächeninhalt des Dreiecks NPQ_u maximal für $u = \frac{11}{3} \approx 3{,}67$.

(iii) Es muss gelten:

$3 \cdot f(u) = 4$

$\Leftrightarrow \quad u_1 \approx 3{,}20 \text{ oder } u_2 \approx 4{,}58$



Der Flächeninhalt des Dreiecks NPQ_u nimmt für $u_1 \approx 3{,}20$ oder $u_2 \approx 4{,}58$ einen Flächeninhalt von 4 Flächeneinheiten an.

Alternativ:

Die grafische Bestimmung der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $A(x) = 3 \cdot f(x)$ und $y = 4$ ergibt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks NPQ_u für $u_1 = 3{,}2$ oder $u_2 = 4{,}58$ einen Flächeninhalt von 4 Flächeneinheiten annimmt.