

Inhaltsverzeichnis

Teil I Mathematische Theorie der Intervalle

1	Musikalische Intervalle und Töne	5
1.1	Physikalische Intervalle: Töne-Schwingungen-Monochordium	7
1.2	Frequenz- und Proportionsmaß und das Frequenzmaßkriterium.	24
1.3	Die Intervalladjunktion und ihre Arithmetik	37
1.4	Das Centmaß als Metermaß musikalischer Intervalle	45
1.5	Musikalische Mittelwerte und ihre harmonischen Gesetze	55
1.6	Das Oktavengebäude aller musikalischen Intervalle	65
2	Die Kommensurabilität musikalischer Intervalle	85
2.1	Die Kommensurabilität und ihre Algebra	86
2.2	Kommensurable Teilbarkeit musikalischer Intervalle	101
2.3	Die Symmetrie kommensurabler Teiler und Vielfachen	120
2.4	Das Kommensurabilitätsprinzip der Oktave	128
2.5	Kommensurabilität und Periodizität musikalischer Iterationen	131
2.6	Analysis der Kommensurabilität musikalischer Intervalle	137
3	Harmonisch-rationale und klassisch-antike Intervalle	145
3.1	Harmonisch-rationale Intervalle und ihr Primfaktorgebäude	146
3.2	Harmonisch-rationale Kommensurabilität.	161
3.3	Harmonisch-rationale Teilung: Die Gleichung $m * X = Y$	167
3.4	Einfach-superpartikulare Intervalle und antike Konsonanz.	175
3.5	Antik-konsonante Zerlegung harmonisch-rationaler Intervalle.	181
3.6	Konsonanz und die Euler'sche Gradusfunktion.	197
3.7	Zugabe: Die Exponentialfunktion musikalischer Intervalle	203

4	Iterationen und ihre musik-mathematischen Gesetze	211
4.1	Iterationen zweier Intervalle und ihre harmonische Algebra	212
4.2	Lineare Unabhängigkeit musikalischer Intervalle	225
4.3	Die Theorie linearer harmonischer Gleichungssysteme	233
4.4	Das Operatormodell der Reoktavierung	239
4.5	Die Analysis der Iterationen und das Tonverteilungstheorem	248
4.6	Die mathematische Theorie der reinen Harmonik	258
4.7	Die Tonspirale – eine Einladung zur höheren Analysis	266

Teil II Mathematische Theorie der Skalen

5	Skalen und ihre Modelle	285
5.1	Das Tastaturmodell und das Skalenalphabet	286
5.2	Leitereigene und skaleninterne Intervalle	293
5.3	Stufenturm- und Quintenkreis – gleichwertige Fundamente	303
5.4	Die Periodensymmetrien chromatischer Skalen	314
5.5	Die Stufenarchitekturen für doppelt-periodische Skalen	318
6	Kombinatorische Spiele rund um die Charakteristiken	327
6.1	Kombinatorik der Skalenvarianten	328
6.2	Kombinatorik der Stufentypen	347
6.3	Transponieren – Transformieren und die Stufenziffercharakteristik	366
6.4	Skalen und ihre Tonartencharakteristik	385
7	Diatonik und Chromatik der Wolfsquintenkreise	397
7.1	Die Elementarintervalle der einfachen Quinteniteration	399
7.2	Die Quintenkreisformeln der Heptatonik und Chromatik	409
7.3	Die Wolfsquinte und die quintgenerierte Chromatik	418
7.4	Die Wolfsquinte und die quintgenerierte Heptatonik	428
7.5	Theorie und Analyse leitereigener Intervalle der Wolfsquintenchromatiken	440
7.6	Musikalische Anwendung der Methode heptatonischer Halbkreise und ihrer Tonartencharakteristiken	456
7.7	Chromatische Quintenkreise mit mehrfachen Wolfsquinten	462

Teil III Mathematische Temperierungstheorie

8	Das pythagoräische Intervallsystem	477
8.1	Das pythagoräische Ursystem	477
8.2	Die allgemeine pythagoräische $1/n$ -Komma-Temperierung	486
8.3	Das pythagoräische System im historischen Licht	493
8.4	Zugabe: Der Traum des Pythagoras	498

9	Die Mitteltönigkeit	501
9.1	Wege zur Mitteltönigkeit	502
9.2	Die Mitteltönigkeit zur reinen großen Terz	505
9.3	Die Mitteltönigkeit zur reinen kleinen Terz	515
9.4	Die allgemeine mitteltönige $1/n$ -Komma-Temperierung	521
10	Das natürlich-harmonische System und die Enharmonik	529
10.1	Wege zum rein-natürlich-harmonischen System	530
10.2	Das Tongitter von Leonhard Euler	539
10.3	Das Kommatasystem der klassischen Enharmonik	551
10.4	Die Euler-Skalen: diatonisch – chromatisch – enharmonisch	559
10.5	Die Stufenintervalle der klassischen Diatonik und Chromatik	573
10.6	Der semitonale Aufbau des Terz-Quint-Systems	587
10.7	Die harmonischen Gleichungen der Chromatik und Enharmonik	599
10.8	Die Enharmonik und ihre funktionale Harmonik	615
10.9	Zugabe: Diatonische Algebra des Terz-Quint-Gitters	622
11	Die Gleichstufigkeit und ihr spannendes Umfeld.	639
11.1	Über die Gleichberechtigung im Reich der Töne	640
11.2	Die Prinzipien der Gleichstufigkeit	643
11.3	Die 31-gleichstufige Skala und die Mitteltönigkeit	650
11.4	Chromatische Wunder	653
11.5	Die gleichstufige Gitarrenstimmung von Daniel Strähle	656
11.6	Lautenmusik und Gleichstufigkeit – beinahe unzertrennlich.	663
12	Historische Temperaturen – Methodik und Theorie	673
12.1	Die Temperierung – ein Optimierungsproblem?	674
12.2	Henri Arnaut de Zwolle: der Pythagoräiker	677
12.3	Arnold Schlick: Mitteltönigkeit mit zwei Wolfsquinten	679
12.4	Johannes Kepler: Astronomia trifft Musica	683
12.5	Andreas Werckmeister: Meister der Ausgleich	688
12.6	Johann Philipp Kirnberger: das geniale Auswahlssystem	690
12.7	Alexander Malcolm: die superpartikulare Teilung	699
12.8	Gioseffo Zarlino: Zauberer der Siebtelteilung	701
12.9	Gottfried Silbermann: der gespiegelte Pythagoras	707
12.10	Francesco Valotti: die paritätische Quintenverteilung	713
12.11	Johann Georg Neidhardt: symmetrisches Dreiquintenspiel	720
12.12	Bach-Kellner: merkwürdige 7:5-Verteilungen	725
	Anhang: Centtabelle einiger historischer Temperierungen	735

Nachwort – Epilog – Postludium	737
Verzeichnisse	741
Literatur	757
Stichwortverzeichnis	761