

## 0

### Einleitung

Die Abschnitte der Einleitung haben zum Ziel, das System der Darstellung erkennen zu lassen, wie es im Folgenden verwendet wird. Dieses System ist gekennzeichnet durch die Schreibweise der Formelzeichen, durch die Art der Vorzeichenfestlegung und die daran geknüpfte Formulierung der Grundgesetze. Diese Kennzeichen werden in der Einleitung zusammengestellt. Dabei ist die Darstellung der Grundgesetze nach Umfang und Form den späteren Bedürfnissen angepasst und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Darüber hinaus enthält die Einleitung einen Abriss der komplexen Wechselstromrechnung und eine kurz gefasste Behandlung der symmetrischen Dreiphasensysteme sowie die Einführung symmetrischer Komponenten. Beide Abschnitte sind als Wiederholung bereits bekannten Stoffs gedacht. Schließlich wird kurz auf die Darstellung magnetischer Felder eingegangen.

#### 0.1

##### Schreibweise der Formelzeichen

Jede physikalische Größe erhält ein Symbol; es wird in Groß- oder Kleinschreibung, z. B. als  $g$  oder  $G$  bzw.  $\gamma$  oder  $\Gamma$ , verwendet. Der kleine Buchstabe ist also i. Allg. einer anderen physikalischen Größe zugeordnet als der große.

Zur Kennzeichnung einer besonderen Eigenschaft einer Größe werden folgende Vereinbarungen getroffen:

- *Vektoren* werden halbfett wiedergegeben, z. B. als  $\mathbf{g}$ .
- *Augenblickswerte* erhalten keine besondere Kennzeichnung.
- *Amplituden* von Sinusgrößen erhalten zusätzlich das Symbol  $\hat{\phantom{g}}$ , z. B. als  $\hat{g}$ . Durch den Formalismus der Ableitungen ist es nicht zu vermeiden, dass auf diese Weise gekennzeichnete Amplituden vorzeichenbehaftet sein können.
- *Zeiger der komplexen Wechselstromrechnung* werden unterstrichen, z. B. als  $\underline{g}$ . Dabei gilt die Definition  $\underline{g} = \operatorname{Re}\{g e^{j\omega t}\}$ .  $\underline{g}$  ist also der sog. ruhende Zeiger  $\underline{g} = \hat{g} e^{j\varphi_g}$ . Die konjugiert komplexe Größe zu  $\underline{g}$  wird als  $\underline{g}^*$  bezeichnet.
- *Zeitliche Mittelwerte* werden durch Überstreichung gekennzeichnet, z. B. als  $\overline{g}$ .

- *Räumliche Mittelwerte* erhalten den Index  $m$ , z. B. als  $g_m$ .
- *Zeitliche und räumliche Maximalwerte* erhalten den Index  $\max$ , z. B. als  $g_{\max}$ .

Als Ausnahmen von den oben getroffenen Vereinbarungen werden entsprechend üblichen Gepflogenheiten folgende zugelassen:

*Effektivwerte* von Spannungsabfällen  $u$ , induzierten Spannungen  $e$  und Stromstärken  $i$  werden mit  $U$ ,  $E$  und  $I$  bezeichnet. Für die gleichen Größen werden Effektivwertzeiger definiert als

$$\underline{U} = \frac{u}{\sqrt{2}}, \quad \underline{E} = \frac{e}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \underline{I} = \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Darstellungen mit Effektivwertzeigern und Augenblickswertzeigern sind einander äquivalent. Beziehungen, die Zusammenhänge zwischen magnetischen und elektrischen Zustandsgrößen herstellen, lassen sich eleganter mit Augenblickswertzeigern formulieren. Zeigerbilder werden hinsichtlich elektrischer Zustandsgrößen unter Verwendung der Effektivwertzeiger  $\underline{U}$ ,  $\underline{E}$  und  $\underline{I}$  dargestellt. Der Punkt, an dem von Augenblickswert- auf Effektivwertzeiger übergegangen wird, ist prinzipiell beliebig.

*Gleichwerte* und damit auch zeitliche Mittelwerte von Spannungsabfällen  $u$ , induzierten Spannungen  $e$ , Stromstärken  $i$ , Drehmomenten  $m$  und Leistungen  $p$  werden mit  $U$ ,  $E$ ,  $I$ ,  $M$  und  $P$  bezeichnet.

## 0.2

### Formelzeichen

$a$	Zahl der parallelen Ankerzweipaaare	$e, E$	induzierte Spannung
$\underline{a}$	$e^{j2\pi/3}$	$E, E$	elektrische Feldstärke
$A$	Fläche, Querschnittsfläche	$e_{\text{ff}}$	Reaktanzspannung bei der Stromwendung
$A$	Strombelag	$e_w$	Wendefeld-(Querfeld-)Spannung bei der Stromwendung
$b$	Breite, allgemein	$e_{\text{tr}}$	transformatorische Spannung bei der Stromwendung
$B, B$	magnetische Induktion	$e_f$	Funkenspannung bei der Stromwendung
$c, C$	Konstante, Faktor	$e_h$	vom Hauptwellenfeld induzierte Spannung
$c$	spezifische Wärmekapazität	$e_r$	rotatorisch induzierte Spannung
$C$	Polformkoeffizient	$e_s$	selbstinduktiv induzierte Spannung
$C$	Kapazität	$e_{\text{tr}}$	transformatorisch induzierte Spannung
$C$	Ausnutzungsfaktor		
$d$	Dicke		
$dg$	Differenzial der Größe $g$		
$\partial g$	partielles Differenzial der Größe $g$		
$D$	Durchmesser, allgemein		
$D$	Bohrungsdurchmesser		

$e_{h20}$	im Stillstand der Induktionsmaschine induzierte Läuferspannung	$L_{aa}$	Selbstinduktivität einer Wicklung $a$
$f$	Funktion, allgemein	$L_{ab}$	Gegeninduktivität zwischen zwei Wicklungen $a$ und $b$
$f$	Frequenz	$m, M$	Drehmoment
$f_M$	Magnetisierungsfunktion	$m$	Masse
$f_{Am}$	Anlaufgrenzfrequenz	$m$	Strangzahl einer Strangwicklung
$f_{Bm}$	Betriebsgrenzfrequenz		
$f_s$	Steuerfrequenz	$m$	Maßstab, allgemein
$f_z$	Schrittfrequenz	$M_a$	Anzugsmoment
$F$	Kraft	$M_b$	Beschleunigungsmoment
$F$	Fehler	$M_H$	Haltemoment
$g$	Erdbeschleunigung	$M_i$	inneres Drehmoment
$g$	Veränderliche, allgemein	$M_s$	Selbthaltemoment
$g_a$	Einschaltgüte	$M_W$	Widerstandsmoment
$\underline{G}$	Gerade in der komplexen Ebene	$n$	Drehzahl
$h$	Höhe, allgemein	$n$	Kennzahl der Schaltungsbezeichnung
$H, H$	magnetische Feldstärke	$N$	Nutzahl
$i, I$	Stromstärke, allgemein	$n_0$	synchrone Drehzahl
$I_a$	Anzugsstrom	$p$	Polpaarzahl
$i_B$	Strom durch einen Belastungszweig	$p$	Druck
$i_k$	Kurzschlussstrom	$P$	Punkt, Ortskurvenpunkt
$i_l$	Leerlaufstrom	$p, P$	Leistung, allgemein
$I_w$	Wärmestrom	$P$	Wirkleistung
$i_\mu, I_\mu$	Magnetisierungsstrom	$P_i$	innere Leistung
$\text{Im}$	Imaginärteil einer komplexen Größe	$P_{\text{mech}}$	mechanische Leistung
$\text{IW}$	Integrationsweg	$P_q$	Blindleistung
$j$	imaginäre Einheit	$P_s$	Scheinleistung
$J$	Massenträgheitsmoment	$P_v$	Verlustleistung
$k$	Kommutatorstegzahl, Ankerspulenzahl	$p_v$	relative Verlustleistung
$k$	Konstante, Faktor	$q$	Lochzahl, Nutzahl je Pol und Strang
$k$	Schrittfaktor	$Q$	Wärmemenge
$k_r$	Widerstandsverhältnis zur Berücksichtigung der Stromverdrängung	$R$	Widerstand
$\underline{K}$	Kreis in der komplexen Ebene	$R_m$	magnetischer Widerstand
$l$	Länge, allgemein	$R_v$	Vorwiderstand
$l$	Gesamtlänge des Blechpakets	$R_w$	Wärmewiderstand
$l_i$	ideelle Länge	$\text{Re}$	Realteil einer komplexen Größe
$L$	Induktivität, allgemein	$s$	Weg
		$s$	Schlupf
		$\underline{s}$	Schaltungsfaktor
		$S, S$	Stromdichte
		$t$	Zeit

$T$	Zeitkonstante	$\gamma_1$	erster Teilschritt
$T$	Periodendauer	$\gamma_2$	zweiter Teilschritt
$T$	Temperatur (Kelvin-Skala)	$\gamma_r$	resultierender Schritt
$T_c$	Spieldauer	$\gamma_v$	Verkürzungsschritt
$T_k$	Kommutierungsdauer	$\gamma_{\emptyset}$	Durchmesserschritt (unge- sehnte Spule)
$u$	Umfang	$\underline{Y}$	komplexer Leitwert
$u$	Zahl der in einer Schicht ne- beneinanderliegenden Spu- lenseiten einer Nut	$z$	Leiterzahl, allgemein
$u, U$	Spannung, allgemein	$z$	Schrittzahl
$u^*$	bezogene Spannung	$\underline{Z}$	komplexer Widerstand
$u_p, U_p$	Polradspannung	$a$	Winkel, allgemein
$\ddot{u}$	Übersetzungsverhältnis, all- gemein	$a$	Verhältnis Fenster- zu Schen- kelquerschnitt
$v$	Umfangsgeschwindigkeit, Geschwindigkeit	$a$	Wärmeübergangszahl
$\bar{v}$	Verlustdichte	$a$	Temperaturbeiwert
$v$	spezifische Verluste	$a_i$	ideeller Polbedeckungsfaktor
$V$	magnetischer Spannungsab- fall	$a_m$	größte systematische Winkel- abweichung
$V_0$	magnetische Umlaufspan- nung	$a_n$	bezogener Nutteilungswinkel
$\mathcal{V}$	Volumen	$a_s$	systematische Winkeltoleranz je Schritt
$w$	Windungszahl, allgemein	$\beta$	Winkel, allgemein
$w$	Strangwindungszahl, Zweig- windungszahl	$\beta_k$	relative Kurzschlussdauer einer stromwendenden Spule
$w_{fd}$	Windungszahl der Erreger- wicklung je Pol	$\gamma'$	Winkelkoordinate
$(w \xi_p)$	gegenüber dem Hauptwellen- feld wirksame Windungszahl	$\delta$	Polradwinkel
$W$	Spulenweite	$\delta$	Spaltlänge, allgemein
$W$	Energie, allgemein	$\delta$	Fehlwinkel beim Messwand- ler
$W_a$	Anlaufwärme	$\delta$	Luftspaltlänge
$W_m$	magnetische Energie	$\delta_i$	ideelle Luftspaltlänge unter Berücksichtigung der Nutzung
$x$	Koordinate, allgemein	$\delta_i''$	ideelle Luftspaltlänge unter Berücksichtigung von Nu- tung und magnetischem
$x$	Strecke in Ortskurven		Spannungsabfall im Eisen
$x$	bezogene Reaktanz	$\Delta g$	Änderung einer Größe $g$ , Dif- ferenz
$X$	Reaktanz	$\eta$	reeller Parameter
$X_d$	synchrone Längsreaktanz	$\eta$	Wirkungsgrad
$X_h$	Hauptfeldreaktanz	$\eta_a$	Jahreswirkungsgrad
$X_p$	Potier-Reaktanz	$\vartheta$	Übertemperatur, Temperatur in der Celsius-Skala
$X_q$	synchrone Querreaktanz	$\Theta$	Durchflutung
$\gamma$	Koordinate, allgemein		
$\gamma$	Wicklungsschritt, allgemein		

$\Theta$	Durchflutungsverteilung (Felderregerkurve) des Luftspaltfelds	$\xi$	Wicklungsfaktor
$\kappa$	elektrische Leitfähigkeit	$\xi$	Verlustverhältnis
$\Lambda$	magnetischer Leitwert	$\rho$	Dichte eines Stoffs
$\Lambda_w$	Wärmeleitwert	$\sigma$	Streukoeffizient
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	$\tau$	Zeitkonstante des Erwärmungsvorgangs
$\lambda$	Ordnungszahl einer Oberschwingung	$\tau$	Teilung
$\lambda_g$	Verhältnis der Grundschwingungsfrequenzen, relative Drehzahl	$\tau_n$	Nutteilung
$\mu$	Permeabilität	$\tau_p$	Polteilung
$\mu_0$	Permeabilität des leeren Raums	$\varphi$	Phasenverschiebung zwischen $\underline{u}$ und $\underline{i}$
$\mu_{Fe}$	Permeabilität des Eisens	$\varphi$	Füllfaktor
$\nu$	bezogene Ordnungszahl bzw. Polpaarzahl einer Drehwelle	$\varphi_g$	Phasenlage einer Wechselgröße $g$
$\nu'$	Ordnungszahl bzw. Polpaarzahl einer Drehwelle	$\Phi$	magnetischer Fluss
		$\psi$	Flussverkettung
		$\omega$	Kreisfrequenz
		$\Omega$	mechanische Winkelgeschwindigkeit

### Indizes

$a$	Strangbezeichnung	F	Fenster
$a$	Anker	Fe	Eisen, ferromagnetischer Werkstoff
$a$	Anzugs...	$g$	gegeninduktiver Anteil
$a$	Jahr	$g$	Gegensystem (symmetrische Komponente)
$(a)$	Anfangswert	gr	Grenz...
ab	Abgabe	h	Hauptfeld
auf	Aufnahme	hyst	Hysterese
A	Arbeitsmaschine	$i$	allgemeine Bezifferung
A, B	Transformator A bzw. B	$i$	ideell
$b$	Strangbezeichnung	$i$	inneres
$b$	Blindanteil, Imaginärteil	ist	Istwert
B	Bürste, Bürstenpaar	$j$	allgemeine Bezifferung
B	Belastung, Betrieb, Bürde	$k$	kalt
$c$	Strangbezeichnung	$k$	Kurzschluss
$d$	Längsachse, Längsfeldkomponente	kipf	Kippunkt
D	Drehfeld	krit	kritisch
e	Erregerwicklung	KM	Kühlmittel
el	elektrisch	l	Leerlauf
E	Erde	Luft	Luft
fd	Erregerwicklung bei Synchronmaschinen	L	Leiter

L1, L2, L3	Leiterbezeichnung im Dreiphasensystem	u	Umgebung
		ü	Übergang
m	magnetisch	v	Verlust
m	Mittelschenkel	v	vorgeschaltet
m	räumlicher Mittelwert	v	verkürzt
m	Mitsystem (symmetrische Komponente)	vzb	vorzeichenbehaftet
		w	Wendefeld, Wendepol
max	Maximalwert	w	Wicklung, Wicklungskopf
min	Minimalwert	w	Wirkanteil, Realteil
mech	mechanisch	w	Wärme, warm
M	Magnet, Magnetkreis	W	Wechselfeld
M	Masche	W	Widerstands-
M	Maschine	wb	Wirbel
M	Messinstrument	z	Zahn
M	Drehmoment	z	Zusatz, zusätzlich
n	Normalkomponente	zw	Zweig
n	Nut, Nutung	zul	zulässig
n	negative Phasenfolge	$\delta$	Luftpalt, Spalt
N	Bemessungsbetrieb, Bemessungswert	$\lambda$	bezogen auf $\lambda$ . Oberschwingung
Netz	Netz	$\lambda$	bei anderer Speisefrequenz
p	bezogen auf Hauptwelle		
p	Pol	$\mu$	Magnetisierung
P	Pause	$\nu$	bezogen auf $\nu$ . Harmonische
q	Querachse, Querfeldkomponente	$\sigma$	Streuung, Streufeld
r	rotatorisch	$\rho$	Bezifferung von Käfigmaschinen
r	Widerstand		
r	Ring	0	Synchronismus
rb	Reibung	0	Leerlauf
res	resultierend	0	Nullsystem (symmetrische Komponente)
RG	Erregermaschine		
s	Stab	1	Ständer
s	selbstinduktiver Anteil	1	Primärseite
S	Schenkel	2	Läufer
S	Schalter	2	Sekundärseite
soll	Sollwert	1, 2, 3, ...	laufende Wicklungsbezeichnung
sp	Spule		
str	Strang	$\emptyset$	bezogen auf den Durchmesser
t	Tangentialkomponente		
T	Transformator	$\wedge$	Sternschaltung
tr	transformatorisch	$\Delta$	Dreieckschaltung
u	Spannung	$\sim$	Wechselstrom
u	Ummagnetisierung	—	Gleichstrom

## Zusätzliche Kennzeichnung der Größen

$\underline{x}$	komplexe Größe, Größe der komplexen Wechselstromrechnung	$x^*$	bezogene Größe
$x^*$	konjugiert komplexe Größe	$x'$	auf die Ständerwicklung transformierte Größe
$\hat{x}$	Amplitude	$\bar{x}$	zeitlicher Mittelwert
		$x^+$	transformierte Größe

## 0.3

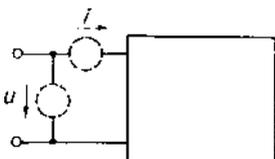
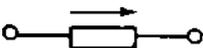
## Vorzeichenvereinbarungen

**a) Elektrische und magnetische Größen** Ein allgemeiner Zweipol des elektrischen Kreises nach Bild 0.3.1 führt einen Strom  $i$ , und zwischen seinen Klemmen herrscht eine Klemmenspannung  $u$ , die im Sinne eines Spannungsabfalls eingeführt ist. Es wird vereinbart, dass  $u$  und  $i$  im gleichen Sinn positiv gezählt werden. Dies wird auch als Verbraucherzählpeilsystem (VZS) bezeichnet. Die gegenteilige Vereinbarung, von der kein Gebrauch gemacht werden soll, heißt Erzeugerzählpeilsystem (EZS). Zur Kennzeichnung der positiven Zählrichtung erhält der Zweipol einen Zählpfeil. Er gilt für die Spannung  $u$ , wenn die Beziehungen zwischen den Spannungen eines Stromkreises aufgestellt werden, und für den Strom  $i$  bei der Aufstellung der Beziehungen zwischen den Strömen. Er liegt darüber hinaus der Formulierung des Strom-Spannungs-Verhaltens zugrunde, das der Zweipol besitzt.

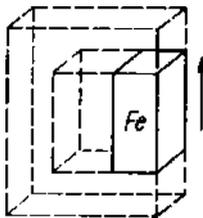
Strom und Spannung eines Klemmenpaars einer beliebigen Einrichtung werden so gezählt, dass die gesamte Anordnung hinter den Klemmen wieder als ein Zweipol betrachtet wird. Dazu sind Strom und Spannung im gleichen Sinn positiv zu zählen (s. Bild 0.3.2), d. h. so, dass bei positivem Strom in Bezug auf den Stromzählpfeil ein positiver Spannungsabfall in Bezug auf den Spannungszählpfeil beobachtet wird, wenn die Leistung in die Anordnung hinter den Klemmen hineinfließt. Die entsprechenden Zählpfeile für  $u$  und  $i$  kann man sich fiktiven oder tatsächlich vorhandenen Messinstrumenten zugeordnet denken. An der Verbindungsstelle von Klemmenpaaren mehrerer Schaltungselemente wird ein gemeinsamer Spannungszählpfeil eingeführt. Die Spannung eines Klemmenpaars wird auch als Klemmenspannung bezeichnet.

Ein Abschnitt des magnetischen Kreises führt einen Fluss  $\Phi$ , und über ihm liegt ein magnetischer Spannungsabfall  $V$ . Es wird vereinbart, dass  $\Phi$  und  $V$  im glei-

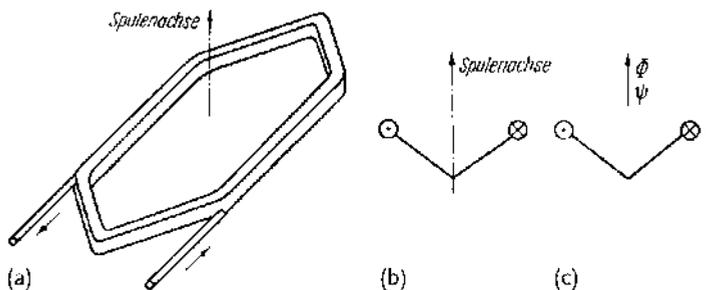
**Bild 0.3.1** Allgemeiner Zweipol mit Zählpfeil für die Spannung  $u$  und den Strom  $i$ .



**Bild 0.3.2** Zählpfeile für die Spannung  $u$  und den Strom  $i$  eines Klemmenpaars.

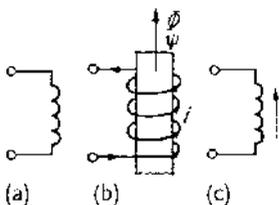


**Bild 0.3.3** Zählpfeil für den Fluss  $\Phi$  und den magnetischen Spannungsabfall  $V$  eines Abschnitts des magnetischen Kreises.



**Bild 0.3.4** Zuordnung der positiven Zählrichtungen für den Fluss  $\Phi$  bzw. die Flussverketzung  $\psi$  und den Strom  $i$  einer Spule mit angegebener Spulenachse. (a) Reale Anord-

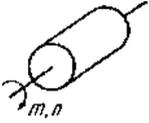
nung der Spule; (b) schematische Darstellung der Spule im Schnitt; (c) schematische Darstellung der Spule im Schnitt mit Angabe der positiven Zählrichtungen für  $\Phi$  bzw.  $\psi$  und  $i$ .



**Bild 0.3.5** Zur Vorzeichenfestlegung bei der Darstellung einer Spule mit dem Schaltzeichensymbol.

chen Sinn positiv gezählt werden. Ein Abschnitt des magnetischen Kreises erhält dementsprechend einen Zählpfeil (s. Bild 0.3.3).

Eine Spule wird von einem Strom  $i$  durchflossen und von einem Fluss  $\Phi$  durchsetzt, bzw. sie besitzt eine Flussverketzung  $\psi$ . Es wird vereinbart, dass die positive Zählrichtung des Stroms  $i$  der des Flusses  $\Phi$  bzw. der Flussverketzung  $\psi$  entsprechend Bild 0.3.4 im Rechtsschraubensinn zugeordnet ist. Wenn eine Spulenachse angegeben ist, die auch einer Reihe von Spulen gemeinsam sein kann, wird der Fluss in Richtung dieser Achse positiv gezählt. Das Schaltzeichensymbol einer Spule zeigt Bild 0.3.5a. Es soll vereinbart werden, dass Spulen in dieser Darstellung stets rechtswendig in Bezug auf die Spulenachse sind. Wie Bild 0.3.5b veranschaulicht, stimmt in diesem Fall die Richtung, in der die einzelnen Windungen bei positivem Strom aufeinanderfolgend durchflossen werden, mit der positiven Zählrichtung des Flusses bzw. der Flussverketzung überein, die ihrerseits in Rechtsschraubenzuordnung zur positiven Zählrichtung des Stroms in den Windungen steht. Damit genügt die Angabe eines Zählpfeils, der für den Strom im elektrischen Kreis und für den Fluss im magnetischen Kreis gilt (s. Bild 0.3.5c).



**Bild 0.3.6** Festlegung der positiven Zählrichtungen für das am Läufer angreifende Drehmoment  $m$  und seine Drehzahl  $n$ .

**b) Mechanische Größen** Das am Läufer angreifende Drehmoment  $m$  und die Winkelgeschwindigkeit eines Läufers bzw. seine Drehzahl  $n$  sollen entsprechend Bild 0.3.6 im gleichen Sinn positiv gezählt werden.

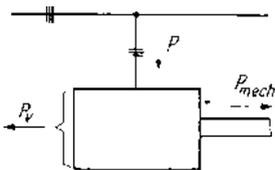
**c) Leistungen** Leistungen, die nicht rein elektrischer Natur sind, werden einem Leistungszählpfeil entsprechend positiv gezählt. Das betrifft mechanische Leistungen, die über eine Welle transportiert werden, und Verlustleistungen, die als Wärme aus einem betrachteten Volumen strömen.

*Elektrische Leistungen* werden positiv gezählt, wenn sie dem betrachteten Schaltungselement zufließen. Dementsprechend wird die Leistung eines Elements  $j$  stets über die Beziehung  $p_j = u_j i_j$  ermittelt, wobei  $u_j$  der Spannungsabfall über dem Element ist und  $i_j$  der Strom durch das Element. Im allgemeinen Fall ist  $p$  eine Funktion der Zeit. Wenn für einen betrachteten Zeitpunkt  $p > 0$  ist, bildet das Element in diesem Augenblick einen Verbraucher, während es bei  $p < 0$  als Erzeuger arbeitet. Bei sinusförmigem Verlauf von  $u$  und  $i$  pulsiert  $p$  mit dem doppelten Wert der Frequenz des Stroms bzw. der Spannung um einen Mittelwert. Dieser Mittelwert wird als *Wirkleistung*  $P$  bezeichnet. Demnach bedeutet positive Wirkleistung eines Elements, d. h.  $P > 0$ , dass es sich im Mittel wie ein Verbraucher verhält, während bei  $P < 0$  im Mittel das Verhalten eines Erzeugers vorliegt.

Im Bild 0.3.7 ist die Prinzipdarstellung einer rotierenden Maschine mit Leistungszählpfeilen versehen worden. Mit dieser Festlegung der positiven Zählrichtungen des Leistungsflusses gilt, wenn keinerlei Änderung der in der Maschine als Wärme, magnetische Energie oder kinetische Energie gespeicherten Energie stattfindet,

$$P = P_{\text{mech}} + P_v .$$

Dabei ist  $P$  die mittlere elektrisch zugeführte Leistung und  $P_{\text{mech}}$  die mittlere mechanisch abgegebene Leistung, während  $P_v$  die mittlere Verlustleistung darstellt, die als Wärmestrom aus der Maschine austritt.



**Bild 0.3.7** Anordnung der Leistungszählpfeile bei einer rotierenden elektrischen Maschine.

## 0.4

## Formulierung der Grundgesetze

**a) Grundschaltelemente** Das Strom-Spannungs-Verhalten der Grundschaltelemente wird durch folgende Beziehungen beschrieben

$$\text{Leiteranordnung mit Widerstand } R \quad u = Ri, \quad (0.4.1)$$

$$\text{Drosselspule mit Induktivität } L^1 \quad u = L \frac{di}{dt}, \quad (0.4.2)$$

$$\text{Kondensatoranordnung mit Kapazität } C \quad i = C \frac{du}{dt}. \quad (0.4.3)$$

Im Bild 0.4.1 sind die drei Schaltzeichen der Grundschaltelemente dargestellt und mit je einem Zählpfeil versehen worden. Die Beziehungen (0.4.1) bis (0.4.3) gelten, wenn sowohl der Spannungsabfall  $u$  als auch der Strom  $i$  positiv in Bezug auf diesen Zählpfeil gezählt werden.

**b) Knotenpunktsätze** Die Quellenfreiheit der elektrischen Strömung lässt sich formulieren als

$$\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (0.4.4)$$

d. h. das Hüllintegral der Stromdichte  $\mathbf{S}$  verschwindet. Für das Hüllintegral kann man schreiben

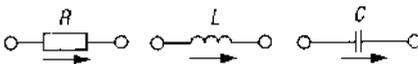
$$\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \sum \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}.$$

Dabei ist

$$\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = i$$

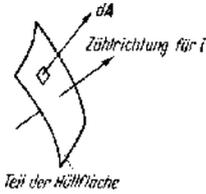
der Strom durch eine Teilfläche der gesamten Hüllfläche, z. B. durch einen diskreten Leiter, der die Hüllfläche durchstößt. Es ist zu beachten, dass die Wahl der Richtung von  $d\mathbf{A}$  für eine derartige Teilfläche entsprechend Bild 0.4.2 die Zählrichtung des Stroms durch die Fläche festlegt. Wenn die Zählrichtungen für die einzelnen Teilflächen der Hüllfläche willkürlich festgelegt werden, müssen die Ströme vorzeichenbehaftet (vzb) summiert werden. Aus (0.4.4) erhält man also

$$\sum_{\text{vzb}} i = 0. \quad (0.4.5)$$

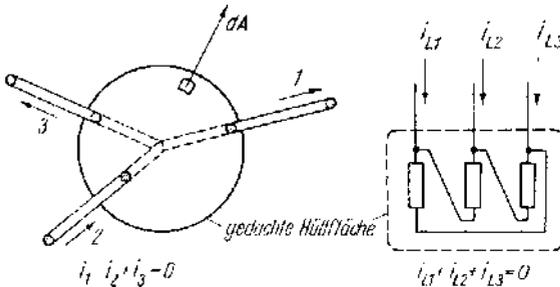


**Bild 0.4.1** Die Grundschaltelemente  $R$ ,  $L$  und  $C$ .

1) Auf die Einführung von Induktivitäten wird im Unterabschnitt 0.4e nochmals eingegangen.



**Bild 0.4.2** Zuordnung der positiven Zählrichtung des Stroms  $i$  durch eine Fläche und der Richtung des Flächenelements  $dA$ .



**Bild 0.4.3** Anwendungsbeispiele für  $\sum_{vzb} i = 0$ .

Die vorzeichenbehaftete Summe der Ströme, die durch die Hüllfläche eines betrachteten Volumens eintreten oder austreten, ist null<sup>2)</sup>. Diese Erkenntnis liefert insbesondere eine Aussage über die Ströme mehrerer Leitungen, die in einem Knotenpunkt zusammenlaufen. In dieser Anwendung wird (0.4.5) als *Knotenpunktsatz* bezeichnet. Im Bild 0.4.3 werden zwei Anwendungen von (0.4.5) gezeigt.

Die *Quellenfreiheit des magnetischen Felds* lässt sich formulieren als

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (0.4.6)$$

d. h. das Hüllintegral der magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$  verschwindet. Wenn man als Fluss  $\Phi$  durch eine Teilfläche der Hüllfläche

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

eingführt, geht (0.4.6) analog zum Übergang von (0.4.4) auf (0.4.5) über in

$$\sum_{vzb} \Phi = 0. \quad (0.4.7)$$

Da die Wahl der Richtung von  $dA$  analog zum Bild 0.4.2 die positive Zählrichtung für den Fluss  $\Phi$  durch die Teilfläche festlegt, muss bei willkürlichem Einführen

2) Die Beziehung (0.4.5) gilt allgemein, wenn die Verschiebungsströme in der Summe der Ströme mit berücksichtigt werden. In der Gleichstromtechnik verschwinden die Verschiebungsströme, sodass (0.4.5) unmittelbar für die Leitungsströme gilt. Für die Untersuchung vieler Vorgänge in Anordnungen der

elektrischen Energietechnik können die Verschiebungsströme auch bei zeitlich veränderlichen Strömen vernachlässigt werden, sodass (0.4.5) auch in diesem Fall auf die Leitungsströme angewendet werden kann. Das magnetische Feld wird dann als quasistationär betrachtet.

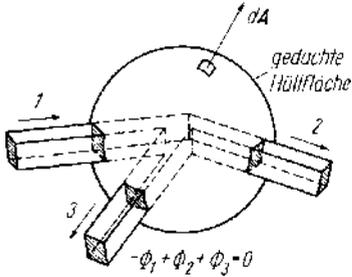


Bild 0.4.4 Anwendungsbeispiel für  $\sum_{vzb} \Phi = 0$ .

der positiven Zählrichtungen der einzelnen Teilflächen die vorzeichenbehaftete Summe ihrer Flüsse entsprechend (0.4.7) gebildet werden. Die Beziehung (0.4.7) wird auch als *Knotenpunktsatz des magnetischen Kreises* bezeichnet. Eine Anwendung dieses Satzes zeigt Bild 0.4.4.

**c) Durchflutungsgesetz** Das Durchflutungsgesetz lautet in Integralform

$$\oint H \cdot ds = \int S \cdot dA. \quad (0.4.8)$$

Dabei ist das Flächenintegral der Stromdichte  $S$  über jene Fläche zu erstrecken, die von dem geschlossenen Integrationsweg des Umlaufintegrals der Feldstärke  $H$  aufgespannt wird. Außerdem gilt (0.4.8) für die Rechtsschraubenzuordnung zwischen  $dA$  und dem Umlaufsinn des Integrationswegs, die Bild 0.4.5a zeigt.

Das Flächenintegral in (0.4.8) wird als *Durchflutung*

$$\Theta = \int S \cdot dA \quad (0.4.9)$$

bezeichnet. Die Durchflutung ist positiv in Bezug auf die Rechtsschraubenzuordnung zum Integrationsweg des Umlaufintegrals zu zählen, da einerseits der Zuordnung von  $dA$  und  $ds$  nach Bild 0.4.5a genügt werden muss und andererseits mit  $dA$  die positive Zählrichtung von  $\Theta$  festliegt. Entsprechend der Definition nach (0.4.9) ist die Durchflutung identisch dem Strom durch die vom Integrationsweg aufgespannte Fläche. Wenn dieser durch eine Summe diskreter Leiterströme  $i$

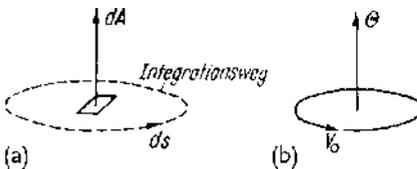


Bild 0.4.5 Zur Vorzeichenfestlegung bei der Formulierung des Durchflutungsgesetzes: (a) Zuordnung der Elemente  $dA$  und  $ds$  in der allgemeinen Formulierung nach (0.4.8); (b) Zuordnung des Zählpfeils für  $\Theta$  und des Umlaufzählsinns  $V_0$  in der Formulierung nach (0.4.12).

gegeben ist, geht (0.4.9) über in

$$\Theta = \sum_{\text{vzb}} i, \quad (0.4.10)$$

wobei die Ströme vorzeichenbehaftet in Bezug auf die positive Zählrichtung von  $\Theta$  zu zählen sind.

Das Umlaufintegral in (0.4.8) wird als *magnetische Umlaufspannung*

$$V_o = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (0.4.11)$$

definiert. Ihr Vorzeichen hängt von der Wahl des Umlaufsinn ab. Die Angabe einer magnetischen Umlaufspannung setzt also voraus, dass der zugehörige *Umlaufzählsinn* angegeben wird. Er symbolisiert, in welcher Richtung der Integrationsweg zur Bestimmung von  $V_o$  durchlaufen worden ist. Mit (0.4.9) und (0.4.11) kann das Durchflutungsgesetz nach (0.4.8) in der Form

$$V_o = \Theta \quad (0.4.12)$$

angegeben werden. Dabei bilden der Zählpfeil der Durchflutung bzw. des Stroms und der Umlaufzählsinn der magnetischen Umlaufspannung entsprechend ihrer Zuordnung zum Integrationsweg ein Rechtsschraubensystem (s. Bild 0.4.5b).

Mit der Zählrichtungszuordnung, die im Abschnitt 0.3 getroffen wurde, liefert der positive Strom einer Spule einen positiven Beitrag zur magnetischen Umlaufspannung eines Integrationswegs durch die Spule, wenn dieser die Spule in Richtung ihrer Achse bzw. in Richtung ihres Zählpfeils für  $\Theta$  durchläuft (s. Bilder 0.3.4 u. 0.3.5).

Das Umlaufintegral  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$  kann in eine Summe von Linienintegralen

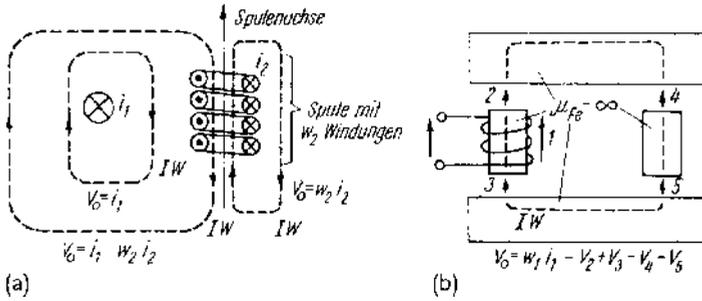
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \sum \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$$

aufgelöst werden. Dabei ist

$$\int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = V_{ab}$$

der *magnetische Spannungsabfall* zwischen zwei Punkten  $a$  und  $b$ . Wenn diese beiden Punkte in der Reihenfolge von  $a$  nach  $b$  auf dem Integrationsweg durchlaufen werden, geht  $V_{ab}$  mit positivem Vorzeichen in das Umlaufintegral ein, im anderen Fall mit negativem. Wenn die Zählpfeile für die einzelnen Abschnitte des magnetischen Kreises, die der Integrationsweg durchläuft, willkürlich festgelegt worden sind, wird

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{\text{vzb}} V. \quad (0.4.13)$$



**Bild 0.4.6** Anwendungsbeispiele für das Durchflutungsgesetz. In (b) wurden die Zählpfeile für die magnetischen Spannungsabfälle über den Luftspalten willkürlich festgelegt. IW: Integrationsweg.

Das Umlaufintegral ist gleich der vorzeichenbehafteten Summe der magnetischen Spannungsabfälle in Bezug auf den Umlaufsinn des Integrationswegs. Aus (0.4.11) und (0.4.13) folgt

$$\sum_{\text{vzb}} V = V_0 ,$$

wobei die magnetischen Spannungsabfälle vorzeichenbehaftet in Bezug auf den Umlaufzählsinn der magnetischen Umlaufspannung zu summieren sind. Diese Beziehung wird als *Maschensatz des magnetischen Kreises* bezeichnet. Bild 0.4.6 zeigt die Anwendung des Durchflutungsgesetzes an zwei Beispielen.

**d) Induktionsgesetz und Maschensatz** Die Beziehung zwischen der magnetischen Induktion  $B$  und der magnetischen Feldstärke  $H$  ist durch die Werkstoffeigenschaften gegeben. Im Idealfall herrscht Proportionalität entsprechend

$$B = \mu H . \tag{0.4.14}$$

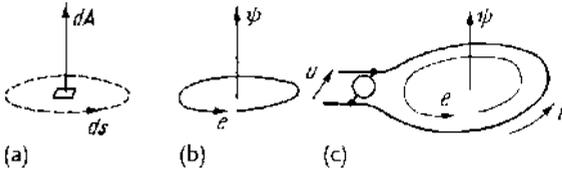
Dabei ist die Permeabilität  $\mu$  für alle nichtferromagnetischen Stoffe praktisch gleich der Permeabilität  $\mu_0$  des leeren Raums. Ferromagnetische Stoffe haben als Kennlinie  $B = f(H)$  die bekannte Hystereseschleife<sup>3)</sup>.

Ein Abschnitt des magnetischen Kreises, der durch zwei Potenzialflächen begrenzt wird und durch den der Fluss  $\Phi$  tritt, ist durch eine bestimmte  $\Phi$ -V-Abhängigkeit gekennzeichnet. Dabei werden  $\Phi$  und V vereinbarungsgemäß (s. Bild 0.3.3) im gleichen Sinn positiv gezählt. Damit erhält man für  $\mu = \text{konst.}$

$$\Phi = \Lambda V = \frac{1}{R_m} V . \tag{0.4.15}$$

Mit  $\Lambda$  wird der *magnetische Leitwert* des Abschnitts bezeichnet, über dem V liegt und durch den  $\Phi$  tritt;  $R_m = 1/\Lambda$  ist der *magnetische Widerstand* dieses Abschnitts.

3) Nichtisotrope Magnetwerkstoffe, z. B. das sog. Texturblech, haben Magnetisierungseigenschaften, die davon abhängen, wie die Magnetisierungsrichtung zur Walzrichtung liegt. Die Vektoren  $B$  und  $H$  sind dann im allgemeinen Fall nicht mehr gleich gerichtet.



**Bild 0.4.7** Zur Vorzeichenfestlegung bei der Formulierung des Induktionsgesetzes: (a) Zuordnung der Elemente  $dA$  und  $ds$  in der allgemeinen Formulierung nach (0.4.16); (b)

Umlaufzählsinns für  $\epsilon$  in der Formulierung nach (0.4.20); (c) Zuordnung der Zählpfeile für  $u$ ,  $i$  und  $\psi$  sowie des Umlaufzählsinns für  $\epsilon$  einer Spule, deren Spannungsgleichung durch (0.4.23) gegeben ist.

Wenn der betrachtete Abschnitt ferromagnetische Teile enthält, wird  $\Phi = f(V)$  eine Kennlinie mit Hysterese- und Sättigungseigenschaften.

Das Induktionsgesetz lautet in Integralform

$$\oint E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \int B \cdot dA. \quad (0.4.16)$$

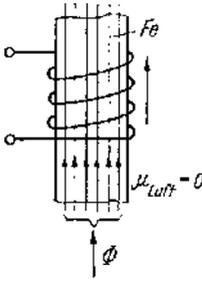
Dabei ist das Flächenintegral der Induktion  $B$  über jene Fläche zu erstrecken, die vom Integrationsweg des Umlaufintegrals der elektrischen Feldstärke  $E$  aufgespannt wird. Für  $dA$  und  $ds$  besteht die Zuordnung nach Bild 0.4.7a.

Die Formulierung des Induktionsgesetzes nach (0.4.16) gilt auch dann, wenn innerhalb der betrachteten Anordnung Bewegungen stattfinden, vorausgesetzt, dass der Integrationsweg überall fest mit dem Leitermaterial verbunden ist bzw. dass keine Bewegung zwischen dem Leitermaterial und dem hindurchgehenden Integrationsweg stattfindet. Insbesondere gilt (0.4.16) also für linienhafte Leitergebilde, bei denen der Integrationsweg durch die Leiterführung gegeben ist. In diesem Fall kann das Flächenintegral in (0.4.16) abgekürzt werden als

$$\psi = \int B \cdot dA. \quad (0.4.17)$$

Dabei ist  $\psi$  die sog. *Flussverketzung*. Sie ist entsprechend den Betrachtungen im Abschnitt 0.3 positiv in Bezug auf die Rechtsschraubenzuordnung zum Integrationsweg des Umlaufintegrals zu zählen, da einerseits der Zuordnung von  $dA$  und  $ds$  nach Bild 0.4.7a genügt werden muss und andererseits mit  $dA$  die positive Zählrichtung von  $\psi$  festliegt. Entsprechend ihrer Definition nach (0.4.17) ist die Flussverketzung  $\psi$  identisch dem Fluss durch die vom Integrationsweg bzw. den zugehörigen linienhaften Leitern aufgespannte Fläche. Es ist üblich, diesen Fluss von jenem Fluss  $\Phi$  zu unterscheiden, der durch einen bestimmten Querschnitt des magnetischen Kreises tritt. Mit dieser Unterscheidung kann man die Flussverketzung  $\psi$  einer Spule, deren sämtliche  $w$  Windungen entsprechend Bild 0.4.8 vom gleichen Fluss  $\Phi$  durchsetzt werden, schreiben als

$$\psi = w\Phi. \quad (0.4.18)$$

Bild 0.4.8 Erläuterung zum Sonderfall  $\psi = \omega \Phi$ .

Das Umlaufintegral in (0.4.16) wird als *induzierte Spannung*<sup>4)</sup>

$$e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (0.4.19)$$

bezeichnet. Analog zur magnetischen Umlaufspannung muss mit der Angabe einer induzierten Spannung der Umlaufzählsinn angegeben sein, der symbolisiert, in welcher Richtung der Integrationsweg zur Bestimmung von  $e$  durchlaufen worden ist.

Mit (0.4.19) und (0.4.17) nimmt das Induktionsgesetz nach (0.4.16) die Form

$$e = - \frac{d\psi}{dt} \quad (0.4.20)$$

an. Dabei bilden der Zählpfeil für die Flussverketzung  $\psi$  und der Umlaufzählsinn für die induzierte Spannung  $e$  entsprechend ihrer Zuordnung zum Integrationsweg wieder ein Rechtsschraubensystem (s. Bild 0.4.7b).

Das Umlaufintegral  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  in (0.4.16) kann in eine Summe von Linienintegralen

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

aufgelöst werden. Dabei ist

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = u_{ab}$$

der *Spannungsabfall* zwischen zwei Punkten  $a$  und  $b$ . Wenn diese beiden Punkte in der Reihenfolge von  $a$  nach  $b$  auf dem Integrationsweg durchlaufen werden, geht  $u_{ab}$  mit positivem Vorzeichen in das Umlaufintegral ein, im anderen Fall mit negativem. Wenn man die Zählpfeile für die einzelnen Abschnitte des elektrischen Kreises, die der Integrationsweg durchläuft, willkürlich festlegt, wird

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{vzb} u. \quad (0.4.21)$$

4) In Analogie zum Vorgehen beim Durchflutungsgesetz hätte das Umlaufintegral auch als Umlaufspannung  $u_o$  bezeichnet werden können.

Das Umlaufintegral  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  ist gleich der vorzeichenbehafteten Summe der Spannungsabfälle in Bezug auf den Umlaufsinn des Integrationswegs. Aus (0.4.19) und (0.4.21) folgt

$$\sum_{\text{vzb}} u = e, \quad (0.4.22)$$

wobei die Spannungsabfälle vorzeichenbehaftet in Bezug auf den Umlaufzählsinn der induzierten Spannung zu summieren sind. Diese Beziehung wird als *Maschensatz* bezeichnet.

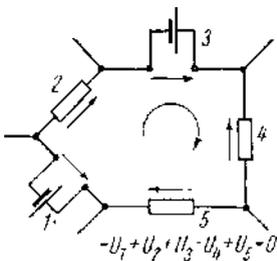
Für die Untersuchungen an elektrischen Maschinen und Transformatoren interessiert die Anwendung des Induktionsgesetzes auf Spulen. Entsprechend den Vorzeichenvereinbarungen des Abschnitts 0.3 sind die Klemmenspannung  $u$  einer Spule und der Strom  $i$  durch die Spule im gleichen Sinn positiv zu zählen. Die positive Zählrichtung der Flussverketzung steht vereinbarungsgemäß in Rechtsschraubenzuordnung zu der des Stroms (s. Bild 0.3.4). Sie muss andererseits in Rechtsschraubenzuordnung zum Umlaufzählsinn der induzierten Spannung stehen. Damit fällt der Umlaufzählsinn für die induzierte Spannung mit der Zählpfeilrichtung des Stroms in der Spule zusammen. Im Bild 0.4.7c ist die Zuordnung der positiven Zählrichtungen dargestellt. Wenn der Spannungsabfall  $Ri$  über dem Widerstand des Spulenleiters eingeführt wird, liefern (0.4.20) und (0.4.22) als *Spannungsgleichung einer Spule*

$$u = Ri - e = Ri + \frac{d\psi}{dt}. \quad (0.4.23)$$

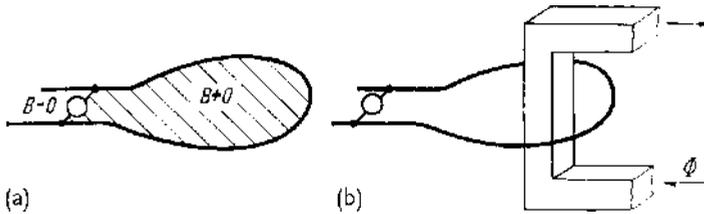
Die Beziehung (0.4.22) kann natürlich auf jede beliebige geschlossene Masche eines Netzwerks angewendet werden. In der Gleichstromtechnik sind alle Ströme und damit alle Flüsse zeitlich konstant. Damit wird  $e = -d\psi/dt = 0$ , und der Maschensatz nimmt die Form

$$\sum_{\text{vzb}} U = 0 \quad (0.4.24)$$

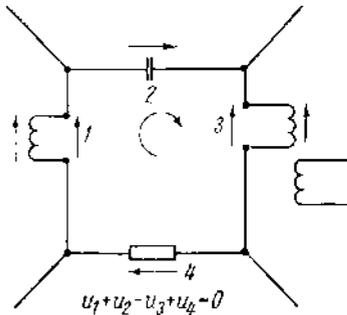
an. Die Anwendung dieser Beziehung auf ein Beispiel zeigt Bild 0.4.9. Auf das Einführen einer elektromotorischen Kraft (EMK) wurde hierbei verzichtet. Stattdessen sind den Spannungsquellen Klemmenspannungen  $U$  im Sinn von Spannungsabfällen zugeordnet worden.



**Bild 0.4.9** Anwendungsbeispiel für den Maschensatz  $\sum_{\text{vzb}} U = 0$ .



**Bild 0.4.10** Zur Vorstellung über die Konzentration des magnetischen Felds auf das Gebiet der Spule.



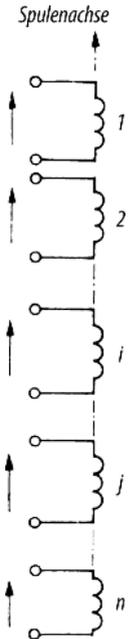
**Bild 0.4.11** Anwendungsbeispiel für den Maschensatz  $\sum_{vzb} u = 0$  bei beliebigem Zeitverhalten der Ströme und Spannungen.

Für die Behandlung von Schaltungen, deren Ströme und Spannungen beliebige Zeitfunktionen sind, lässt sich i. Allg. annehmen, dass magnetische Felder nur innerhalb der Spulen vorhanden sind. Als Begrenzung zwischen dem Spulenninneren und dem äußeren Stromkreis kann man sich einen Spannungsmesser vorgelesen denken (s. Bild 0.4.10a). Damit gilt für die innere Masche (0.4.23), während der äußere Stromkreis als feldfrei angenommen wird. Dieser Vorstellung kommen viele reale Anordnungen dadurch entgegen, dass sich ihr Feld auf die Wege geringen magnetischen Widerstands konzentriert, die in Form der magnetischen Kreise vorgegeben sind (s. Bild 0.4.10b). Wenn die äußeren Stromkreise als feldfrei angesehen werden können, gilt dort als Sonderfall des Maschensatzes nach (0.4.22) auch bei zeitlicher Änderung der Ströme und Spannungen

$$\sum_{vzb} u = 0. \quad (0.4.25)$$

Im Bild 0.4.11 wird die Anwendung dieser Beziehung auf eine Masche eines Netzwerks gezeigt.

**e) Einführung von Selbst- und Gegeninduktivitäten** Im Bild 0.4.12 ist ein System von  $n$  miteinander gekoppelten gleichachsigen Spulen dargestellt. Vereinbarungsgemäß werden die Zählpfeile für die Ströme und Flussverkettungen der Einzelspulen in Richtung der gemeinsamen Achse gelegt. Ein positiver Strom in einer der Spulen ruft dann sowohl in dieser Spule selbst als auch in allen anderen Spu-



**Bild 0.4.12** Anordnung der Zählpfeile bei einem System von  $n$  gleichachsigen Spulen.

len positive Beiträge zur Flussverkettung hervor. Bei konstanter Permeabilität sind diese Anteile der Flussverkettungen dem Strom proportional. Als Proportionalitätsfaktoren werden die *Induktivitäten*  $L$  eingeführt. Dabei vermittelt  $L_{ij}$  zwischen der Flussverkettung der Spule  $i$  und dem Strom in der Spule  $j$ . Die Flussverkettungsgleichung der Spule  $i$  wird damit

$$\psi_i = L_{i1}i_1 + \dots + L_{ij}i_j + \dots + L_{ii}i_i + \dots + L_{in}i_n.$$

Die Induktivitäten  $L_{ii}$ , die zwischen Flussverkettung und Strom ein und derselben Spule vermitteln, heißen *Selbstinduktivitäten*. Alle übrigen Induktivitäten  $L_{ij}$  werden als *Gegeninduktivitäten* bezeichnet. Es ist stets  $L_{ji} = L_{ij}$ .

Die *Flussverkettungsgleichungen* der einzelnen Spulen des aus  $n$  Spulen bestehenden Systems lauten

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + \dots + L_{1n}i_n \\ \psi_2 &= L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + \dots + L_{2n}i_n \\ &\vdots \\ \psi_n &= L_{n1}i_1 + L_{n2}i_2 + \dots + L_{nn}i_n \end{aligned} \right\} . \quad (0.4.26)$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich in Matrixschreibweise darstellen als

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix} \quad (0.4.27)$$

bzw. in abgekürzter Schreibweise

$$\psi_i = \bar{L}_{ij} \dot{i}_j .$$

Wenn die Zählpeile beliebig zueinander liegender Spulen willkürlich festgelegt werden und die Formulierung nach (0.4.26) aufrechterhalten wird, muss damit gerechnet werden, dass einzelne Gegeninduktivitäten negative Zahlenwerte annehmen. Das trifft insbesondere auch bei relativ zueinander rotierenden Spulen zu, wie sie in rotierenden elektrischen Maschinen vorkommen. Dort ändert sich die Gegeninduktivität zwischen einer Ständerspule und einer Läuferspule notwendigerweise periodisch mit der Läuferbewegung, nimmt also abwechselnd positive und negative Werte an.

## 0.5

### Zusammengefasste Darstellung der komplexen Wechselstromrechnung

Eine zeitlich sinusförmige Größe  $g$ , deren Verlauf im Bild 0.5.1 wiedergegeben ist, lässt sich formulieren als

$$g = \hat{g} \cos(\omega t + \varphi_g) . \quad (0.5.1)$$

Dabei stellt die *Amplitude*  $\hat{g}$  den Maximalwert dar, den der Augenblickswert der Sinusgröße  $g$  annimmt. Der Proportionalitätsfaktor vor der Zeit im Argument der Kosinusfunktion ist die sog. *Kreisfrequenz*  $\omega$ . Er sorgt dafür, dass das Argument während einer *Periodendauer*  $T$  um  $2\pi$  wächst. Es ist also  $\omega T = 2\pi$  und damit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f , \quad (0.5.2)$$

wenn die *Frequenz*  $f$  als

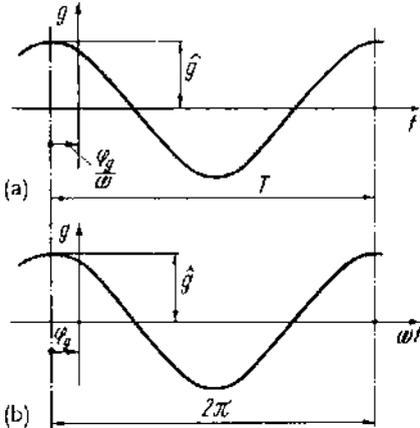
$$f = \frac{1}{T} \quad (0.5.3)$$

eingeführt wird. Der *Phasenwinkel*  $\varphi_g$  gibt die negative Verschiebung des Maximums der Sinusgröße aus dem Ursprung der Zeitkoordinate an. Es ist üblich,  $g$  unter Verwendung des Kosinus zu formulieren. Das geschieht vornehmlich mit Rücksicht auf die folgende Einführung der komplexen Rechnung.

Unter Verwendung der eulerschen Beziehung  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$  lässt sich (0.5.1) auch formulieren als

$$g = \operatorname{Re}\{\hat{g}e^{j(\omega t + \varphi_g)}\} = \operatorname{Re}\{\hat{g}e^{j\varphi_g}e^{j\omega t}\} . \quad (0.5.4)$$

Dabei treten die drei Bestimmungsstücke der Sinusgröße in drei gleichberechtigten Faktoren – der Amplitude  $\hat{g}$ , dem Phasenfaktor  $e^{j\varphi_g}$  und dem Frequenzfaktor  $e^{j\omega t}$  – in Erscheinung. In linearen Systemen stellen sämtliche Veränderlichen Sinusgrößen gleicher Frequenz dar, wenn die Störfunktionen Sinusgrößen dieser



**Bild 0.5.1** Darstellung der zeitlich sinusförmigen Größe  $g = \hat{g} \cos(\omega t + \varphi_g)$ : (a) als Funktion der Zeit  $t$ ; (b) als Funktion des Arguments  $\omega t$ .

Frequenz sind. Es interessieren dann nur die Amplituden und Phasenwinkel der einzelnen Größen. Sie lassen sich als Betrag und Winkel der komplexen Größe

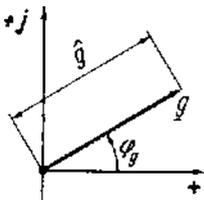
$$\underline{g} = \hat{g} e^{j\varphi_g} \tag{0.5.5}$$

entnehmen, die sich aus der Amplitude und dem Phasenfaktor zusammensetzt. Die Beziehung zwischen der komplexen Größe  $\underline{g}$  und dem zugehörigen Augenblickswert  $g$  lautet dann mit (0.5.4)

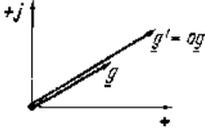
$$g = \text{Re}\{\underline{g} e^{j\omega t}\} . \tag{0.5.6}$$

Die Darstellung der komplexen Größe  $\underline{g}$  in der komplexen Ebene, wie sie im Bild 0.5.2 vorgenommen wurde, wird als *Zeiger* bezeichnet. Wenn mehrere Zeiger, die miteinander in Beziehung stehen, in einer Darstellung erscheinen, spricht man von einem *Zeigerbild*.

Die Einführung der komplexen Größe  $\underline{g}$  nach (0.5.5) und ihre Beziehung zum Augenblickswert  $g$  nach (0.5.6) kann erst Bedeutung gewinnen, wenn es gelingt, die erforderlichen Rechenoperationen, die in den Formulierungen der Grundgesetze auftreten, anstatt mit den Augenblickswerten  $g$  mit den zugehörigen komplexen Größen  $\underline{g}$  durchzuführen. Dazu muss untersucht werden, wie sich eine gewünschte Rechenoperation aus dem Bereich der Augenblickswerte in den Bereich der komplexen Größen abbildet.



**Bild 0.5.2** Darstellung der komplexen Größe  $\underline{g}$  als Zeiger in der komplexen Ebene.



**Bild 0.5.3** Zeigerbild der Größen  $\underline{g}'$  und  $\underline{g}$ , deren zugehörige Augenblickswerte über  $g' = ag$  miteinander verknüpft sind.

Die Multiplikation einer Sinusgröße mit einer Konstanten in der Form  $g' = ag$ , wie sie z. B. im ohmschen Gesetz nach (0.4.1) auftritt, geht mit (0.5.6) über in

$$g' = \operatorname{Re} \left\{ \underline{g}' e^{j\omega t} \right\} = ag = \operatorname{Re} \left\{ a \underline{g} e^{j\omega t} \right\},$$

d. h. es ist

$$\underline{g}' = a \underline{g} \quad (0.5.7)$$

bzw.

$$\hat{g}' e^{j\varphi_g'} = a \hat{g} e^{j\varphi_g}.$$

Daraus folgt für die Amplituden  $\hat{g}' = a \hat{g}$  und für die Phasenwinkel  $\varphi_g' = \varphi_g$ . Die Darstellung der Größen  $\underline{g}'$  und  $\underline{g}$ , die durch (0.5.7) miteinander in Beziehung stehen, zeigt Bild 0.5.3.

Die Addition zweier Sinusgrößen  $g_1$  und  $g_2$  als  $g' = g_1 + g_2$ , wie sie z. B. bei der Anwendung des Knotenpunktsatzes nach (0.4.5) oder des Maschensatzes nach (0.4.22) erforderlich ist, geht mit (0.5.6) über in

$$g' = \operatorname{Re} \left\{ \underline{g}' e^{j\omega t} \right\} = g_1 + g_2 = \operatorname{Re} \left\{ \underline{g}_1 e^{j\omega t} + \underline{g}_2 e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ (\underline{g}_1 + \underline{g}_2) e^{j\omega t} \right\},$$

d. h. es ist

$$\underline{g}' = \underline{g}_1 + \underline{g}_2. \quad (0.5.8)$$

Durch Einführen der Real- und Imaginärteile folgt aus (0.5.8)

$$\operatorname{Re} \left\{ \underline{g}' \right\} + j \operatorname{Im} \left\{ \underline{g}' \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \underline{g}_1 \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \underline{g}_2 \right\} + j \left[ \operatorname{Im} \left\{ \underline{g}_1 \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \underline{g}_2 \right\} \right],$$

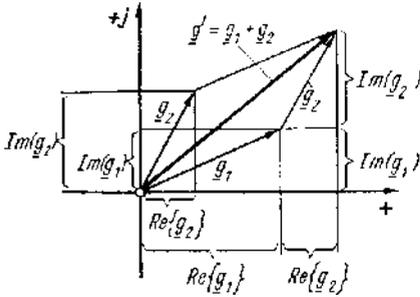
und man erkennt mit Bild 0.5.4, dass sich Zeiger in der komplexen Ebene vektoriell addieren.

Die Differenziation einer Sinusgröße nach der Zeit als  $g' = dg/dt$ , wie sie z. B. im Induktionsgesetz nach (0.4.20) erforderlich ist, geht mit (0.5.6) über in

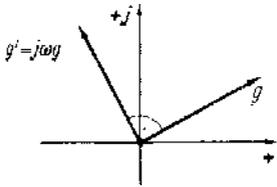
$$g' = \operatorname{Re} \left\{ \underline{g}' e^{j\omega t} \right\} = \frac{dg}{dt} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \underline{g} e^{j\omega t} \right) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ j\omega \underline{g} e^{j\omega t} \right\},$$

d. h. es ist

$$\underline{g}' = j\omega \underline{g}. \quad (0.5.9)$$



**Bild 0.5.4** Entwicklung der vektoriellen Addition der Zeiger, deren zugehörige Augenblickswerte über  $g' = g_1 + g_2$  miteinander verknüpft sind.



**Bild 0.5.5** Zeigerbild der Größen  $\underline{g}'$  und  $\underline{g}$ , deren zugehörige Augenblickswerte über  $g' = dg/dt$  miteinander verknüpft sind.

Die Differenziation nach der Zeit im Bereich der Augenblickswerte bedeutet im komplexen Bereich Multiplikation mit  $j\omega$ . Aus (0.5.9) folgt mit  $j = e^{j(\pi/2)}$

$$\hat{g}' e^{j\varphi'_g} = \omega \hat{g} e^{j(\varphi_g + \pi/2)},$$

und man erhält als Beziehung zwischen den Amplituden

$$\hat{g}' = \omega \hat{g}$$

sowie als Beziehung zwischen den Phasenwinkeln

$$\varphi'_g = \varphi_g + \frac{\pi}{2}.$$

Die differenzierte Größe eilt der zu differenzierenden Größe um  $90^\circ$  voraus. Das (0.5.9) entsprechende Zeigerbild zeigt Bild 0.5.5.

Die zeitliche Integration einer Sinusgröße als  $g' = \int g dt$ , wie sie z. B. in der Strom-Spannungs-Beziehung (0.4.3) des Kondensators vorkommt, geht mit (0.5.6) über in

$$g' = \operatorname{Re} \left\{ \underline{g}' e^{j\omega t} \right\} = \int g dt = \operatorname{Re} \left\{ \int \underline{g} e^{j\omega t} dt \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{j\omega} \underline{g} e^{j\omega t} \right\},$$

d. h. es ist

$$\underline{g}' = \frac{1}{j\omega} \underline{g}. \quad (0.5.10)$$

Die zeitliche Integration im Bereich der Augenblickswerte bedeutet im komplexen Bereich Division durch  $j\omega$ . Mit  $1/j = -j = e^{-j(\pi/2)}$  lässt sich (0.5.10) darstellen als

$$\hat{g}' e^{j\varphi'_g} = \frac{1}{\omega} \hat{g} e^{j(\varphi_g - \pi/2)}.$$

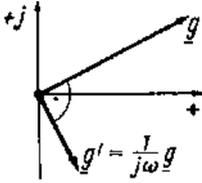


Bild 0.5.6 Zeigerbild der Größen  $\underline{g}'$  und  $\underline{g}$ , deren zugehörige Augenblickswerte über  $g' = \int g dt$  miteinander verknüpft sind.

Daraus folgt als Beziehung zwischen den Amplituden

$$\hat{g}' = \frac{1}{\omega} \hat{g}$$

und als Beziehung zwischen den Phasenwinkeln

$$\varphi'_g = \varphi_g - \frac{\pi}{2}.$$

Die integrierte Größe eilt der zu integrierenden Größe um  $90^\circ$  nach. Das (0.5.10) entsprechende Zeigerbild zeigt Bild 0.5.6.

Die Durchführbarkeit der Rechenoperation im komplexen Bereich versagt bei der Multiplikation zweier Sinusgrößen entsprechend  $g' = g_1 g_2$ , wie sie z. B. zur Ermittlung des Augenblickswerts der Leistung erforderlich ist. Die Ursache des Versagens liegt darin begründet, dass

$$\operatorname{Re} \{ \underline{g}_1 e^{j\omega t} \} \operatorname{Re} \{ \underline{g}_2 e^{j\omega t} \} \neq \operatorname{Re} \{ \underline{g}_1 e^{j\omega t} \underline{g}_2 e^{j\omega t} \}$$

ist. Um den Augenblickswert von  $g$  zu ermitteln, muss also auf die Augenblickswerte von  $g_1$  und  $g_2$  zurückgegriffen werden.

Die Leistung, die über ein Klemmenpaar mit der Spannung  $u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u)$  und dem Strom  $i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i)$  fließt, erhält man mit  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$  zu

$$p = ui = UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) + UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i), \quad (0.5.11)$$

wobei  $U$  und  $I$  die Effektivwerte von Spannung und Strom sind. Sie pendelt mit der doppelten Frequenz der Spannung bzw. des Stroms um den Mittelwert

$$P = UI \cos \varphi = \operatorname{Re} \{ \underline{U} \underline{I}^* \}, \quad (0.5.12)$$

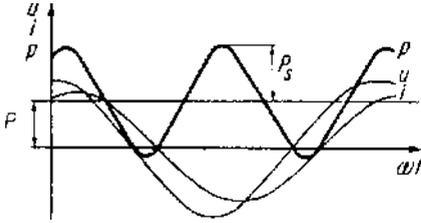
der als *Wirkleistung* bezeichnet wird. Dabei wurde mit

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (0.5.13)$$

die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom eingeführt. Der Verlauf der Leistung ist im Bild 0.5.7 für den Fall dargestellt, dass der Strom gegenüber der Spannung etwas nacheilt.

Außer der Wirkleistung nach (0.5.12) wird als Bestimmungsstück des Leistungsverlaufs nach Bild 0.5.7 die *Scheinleistung*

$$P_s = UI \quad (0.5.14)$$



**Bild 0.5.7** Zeitlicher Verlauf der Leistung, wenn Strom und Spannung Sinusgrößen gleicher Frequenz sind.

als Amplitude des doppelteffrequenten Anteils von  $p$  eingeführt. Eine weitere Beschreibungsgröße der Leistungsverhältnisse ist die *Blindleistung*  $P_q$ , die rein formal als

$$P_q = UI \sin \varphi = \operatorname{Im} \{ \underline{U} \underline{I}^* \} \quad (0.5.15)$$

definiert wird. Die Blindleistung ist eine Rechengröße, die vor allem bei Netzberechnungen Vorteile bietet.

Während man den Augenblickswert der Leistung nach (0.5.11) nicht von der komplexen Darstellung der Spannung und des Stroms ausgehend bestimmen kann, lassen sich ihre Bestimmungsstücke unter Verwendung dieser Größen gewinnen. Dazu bildet man die sog. *komplexe Leistung*  $\underline{P}$ , indem der komplexe Effektivwert der Spannung  $\underline{U}$  mit dem konjugiert komplexen Effektivwert des Stroms  $\underline{I}$  multipliziert wird. Man erhält mit (0.5.13)

$$\underline{P} = \underline{U} \underline{I}^* = UI e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + j P_q \quad (0.5.16)$$

Unter Verwendung der Augenblickswertzeiger ergibt sich

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{u} \underline{i}^* = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \cos \varphi + j \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \sin \varphi \quad (0.5.17)$$

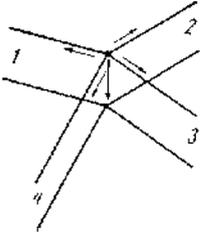
Dabei ist zu beachten, dass die komplexe Leistung eine andere Art komplexer Größen darstellt als die bisher eingeführten Veränderlichen, denn für sie gilt (0.5.6) nicht; sie ist nicht zeitlich sinusförmig.

Die Bedeutung der Blindleistung als zweckmäßige Rechengröße ersieht man aus einer Betrachtung des Netzknotenpunkts im Bild 0.5.8. In dem Knotenpunkt herrscht die Spannung  $\underline{u}$ . Zwischen den Strömen vermittelt entsprechend der Aussage des Knotenpunktsatzes die Beziehung

$$\sum_{\text{vzb}} \underline{i} = 0.$$

Dann muss natürlich auch  $\sum \underline{i}^* = 0$  sein, und man erhält durch Multiplikation mit der Spannung des Knotenpunkts

$$\sum \underline{U} \underline{I}^* = \sum P + j \sum P_q = 0$$



**Bild 0.5.8** Netzknotenpunkt zur Ableitung der Beziehungen  $\sum P = 0$  und  $\sum P_q = 0$ .

und daraus

$$\sum P = 0, \quad (0.5.18)$$

$$\sum P_q = 0. \quad (0.5.19)$$

Die Beziehung (0.5.18) folgt natürlich auch als Aussage des Energieerhaltungssatzes. Die vorgenommene Ableitung zeigt jedoch, dass auch für die Blindleistung ein Erhaltungssatz gilt. Statt die Beziehungen zwischen den Beträgen und Phasenwinkeln der Ströme im Knotenpunkt zu verwenden, bietet es sich also an, die Bilanz der Wirk- und Blindleistungen entsprechend (0.5.18) und (0.5.19) zu bilden.

Als weitere Hilfsgröße der komplexen Wechselstromrechnung wird der *komplexe Widerstand*  $\underline{Z}$  eines Zweipols eingeführt. Er ist definiert als

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U}{I}, \quad (0.5.20)$$

d. h. als das Verhältnis der komplexen Spannung  $\underline{u}$  bzw.  $U$  des Zweipols zu seinem komplexen Strom  $\underline{i}$  bzw.  $I$ . Durch Einführen der Beträge und Winkel geht (0.5.20) über in

$$Z e^{j\varphi_Z} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}.$$

Der Betrag des komplexen Widerstands ist also gleich dem Verhältnis der Amplituden bzw. Effektivwerte von Spannung und Strom;

$$Z = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I}. \quad (0.5.21)$$

Er wird als *Impedanz* oder *Scheinwiderstand* bezeichnet. Der Winkel  $\varphi_Z$  des komplexen Widerstands ist gleich dem Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung und Strom des Zweipols entsprechend

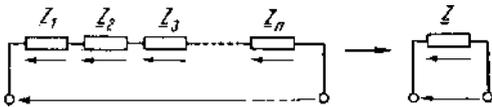
$$\varphi = \varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i. \quad (0.5.22)$$

Der Kehrwert von  $\underline{Z}$  wird als *komplexer Leitwert*

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad (0.5.23)$$

**Tabelle 0.5.1** Strom-Spannungs-Beziehungen und komplexe Widerstände der Grundschaltelemente.

Grundschaltelement	Strom-Spannungs-Beziehung		Komplexer Widerstand		
	allgemein	komplex	$\underline{Z}$	$Z$	$\varphi_Z$
	$u = Ri$		$\underline{Z} = R$	$Z = R$	$\varphi_Z = 0$
	$u = L \frac{di}{dt}$		$\underline{Z} = j\omega L$	$Z = \omega L$	$\varphi_Z = \frac{\pi}{2}$
	$i = C \frac{du}{dt}$		$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$Z = \frac{1}{\omega C}$	$\varphi_Z = -\frac{\pi}{2}$



**Bild 0.5.9** Zur Ermittlung des resultierenden komplexen Widerstands aus einer Reihenschaltung der komplexen Widerstände  $\underline{Z}_1 \dots \underline{Z}_n$ .

bezeichnet. Dabei gilt für die Beträge

$$Y = \frac{1}{Z}$$

und für die Winkel

$$\varphi_Y = -\varphi_Z.$$

Die Grundschaltelemente  $R$ ,  $L$  und  $C$  besitzen die Strom-Spannungs-Beziehungen nach (0.4.1) bis (0.4.3). Die entsprechenden komplexen Beziehungen und die Ausdrücke für den komplexen Widerstand sind in Tabelle 0.5.1 zusammengestellt.

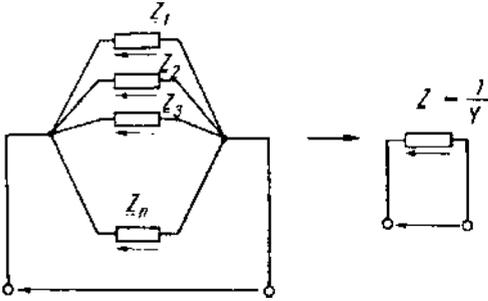
Für eine Reihenschaltung der komplexen Widerstände  $\underline{Z}_1 \dots \underline{Z}_n$  nach Bild 0.5.9 liefert die Anwendung des Maschensatzes mit  $\underline{i} = \underline{i}_1 = \underline{i}_2 = \dots = \underline{i}_n$

$$\underline{u} = \underline{Z}_1 \underline{i}_1 + \underline{Z}_2 \underline{i}_2 + \dots + \underline{Z}_n \underline{i}_n = (\underline{Z}_1 + \dots + \underline{Z}_n) \underline{i} = \underline{Z} \underline{i}.$$

Es ist also

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n. \tag{0.5.24}$$

Für die Parallelschaltung der komplexen Widerstände  $\underline{Z}_1 \dots \underline{Z}_n$  bzw. der zugehörigen komplexen Leitwerte  $\underline{Y}_1 \dots \underline{Y}_n$  nach Bild 0.5.10 liefert die Anwendung des Kno-



**Bild 0.5.10** Zur Ermittlung des resultierenden komplexen Widerstands bzw. des zugehörigen komplexen Leitwerts aus einer Parallelschaltung der komplexen Widerstände  $\underline{Z}_1 \dots \underline{Z}_n$ .

tenpunktsatzes unter Beachtung von  $\underline{u} = \underline{u}_1 = \underline{u}_2 = \dots = \underline{u}_n$

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{u}_2}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{\underline{u}_n}{\underline{Z}_n} = \left( \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n} \right) \underline{u} = \frac{1}{\underline{Z}} \underline{u} = \underline{Y} \underline{u}.$$

Es ist also

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n} \\ \text{bzw.} \\ \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n \end{array} \right\} \quad (0.5.25)$$

Die komplexen Widerstände lassen sich somit im Wechselstromnetzwerk genauso handhaben wie die Gleichstromwiderstände im Gleichstromnetzwerk.

Das *Induktionsgesetz* nach (0.4.20) nimmt in komplexer Darstellung mit (0.5.9) die Form

$$\underline{\varepsilon} = -j\omega \underline{\psi} \quad (0.5.26)$$

an. Für den Sonderfall, dass alle  $w$  Windungen der betrachteten Wicklung mit dem gleichen Fluss  $\underline{\Phi}$  verkettet sind, geht (0.5.26) mit (0.4.18) über in

$$\underline{\varepsilon} = -j\omega w \underline{\Phi}. \quad (0.5.27)$$

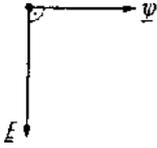
Die induzierte Spannung eilt der Flussverkettung bzw. dem Fluss mit  $-j = e^{-j(\pi/2)}$  um  $90^\circ$  nach. Bild 0.5.11 zeigt das (0.5.26) entsprechende Zeigerbild. Zwischen den Amplituden bzw. Effektivwerten bestehen die Beziehungen<sup>5)</sup>

$$E = \frac{\hat{\varepsilon}}{\sqrt{2}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \hat{\psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f \hat{\psi}$$

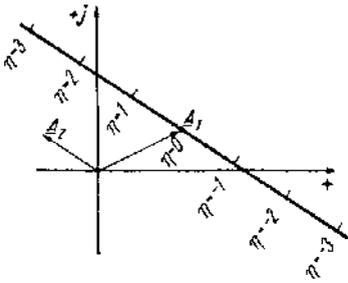
bzw., wenn  $\hat{\psi} = w \hat{\Phi}$  ist,

$$E = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f w \hat{\Phi}. \quad (0.5.28)$$

5) Es ist  $2\pi/\sqrt{2} = 4,44$ ; dies wird in älteren Darstellungen von vornherein eingeführt.



**Bild 0.5.11** Zeigerbild der induzierten Spannung  $\underline{E}$  und der Flussverkettung  $\underline{\psi}$ , die durch das Induktionsgesetz miteinander verknüpft sind.



**Bild 0.5.12** Gerade als Ortskurve der Gleichung  $\underline{A} = \underline{A}_1 + \eta \underline{A}_2$ .

Die *Spannungsgleichung einer Spule* nach (0.4.23) nimmt in komplexer Darstellung die Form

$$\underline{u} = R\underline{i} - \underline{e} = R\underline{i} + j\omega \underline{\psi} \quad (0.5.29)$$

an.

Wenn eine komplexe Größe  $\underline{A}$  eine Funktion eines reellen Parameters  $\eta$  ist, beschreibt die Spitze des Zeigers  $\underline{A}$  in der komplexen Ebene in Abhängigkeit von  $\eta$  eine Kurve, die sog. *Ortskurve*. Die einfachste Ortskurve ist die Gerade. Eine Gerade erhält man z. B. für die Beziehung

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \eta \underline{A}_2, \quad (0.5.30)$$

wie Bild 0.5.12 demonstriert.

Die Ortskurve der Beziehung

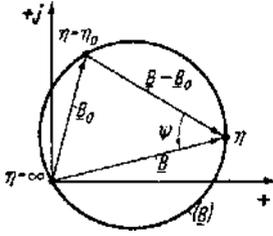
$$\underline{B} = \frac{1}{\underline{A}_1 + \eta \underline{A}_2} \quad (0.5.31)$$

stellt einen Ursprungskreis dar. Davon überzeugt man sich leicht, wenn der Winkel  $\psi$  zwischen einem Zeiger  $\underline{B}$  und einem Zeiger  $(\underline{B} - \underline{B}_0)$  entsprechend Bild 0.5.13 betrachtet wird, der vom Endpunkt des feststehenden Zeigers  $\underline{B}_0$  für  $\eta = \eta_0 = \text{konst.}$  zum Endpunkt des Zeigers  $\underline{B}$  verläuft. Dann ist

$$\frac{\underline{B}}{\underline{B} - \underline{B}_0} = \left| \frac{\underline{B}}{\underline{B} - \underline{B}_0} \right| e^{j\psi}$$

und damit

$$\tan \psi = \frac{\text{Im} \left\{ \frac{\underline{B}}{\underline{B} - \underline{B}_0} \right\}}{\text{Re} \left\{ \frac{\underline{B}}{\underline{B} - \underline{B}_0} \right\}}.$$



**Bild 0.5.13** Zum Nachweis der Kreisgestalt einer Ortskurve, die der Gleichung  $\underline{B} = 1/(\underline{A}_1 + \eta \underline{A}_2)$  gehorcht.

Da sich  $\underline{B}/(\underline{B} - \underline{B}_0)$  mit (0.5.31) darstellen lässt als

$$\frac{\underline{B}}{\underline{B} - \underline{B}_0} = \frac{\underline{A}_1 + \eta_0 \underline{A}_2}{\underline{A}_1 + \eta_0 \underline{A}_2 - \underline{A}_1 + \eta \underline{A}_2} = \frac{1}{\eta_0 - \eta} \frac{\underline{A}_1 + \eta_0 \underline{A}_2}{\underline{A}_2},$$

wird  $\tan \psi \neq f(\eta)$ . Das kann aber nur der Fall sein, wenn die Ortskurve  $\underline{B} = f(\eta)$  einen Kreis darstellt. Dieser Kreis muss durch den Ursprung verlaufen, da der Betrag des Nenners in (0.5.31) für  $\eta \rightarrow \infty$  über alle Grenzen wächst. Der Ursprung trägt damit die Parameterbezeichnung  $\eta = \infty$ .

Die Gleichung des Ursprungskreises (0.5.31) steht mit der Gleichung der Geraden (0.5.30) in der allgemeinen Beziehung

$$\underline{B} = \frac{1}{\underline{A}}. \quad (0.5.32)$$

Die Ermittlung der Ortskurve der Kehrwertfunktion aus der Ortskurve der Funktion selbst wird als *Inversion* bezeichnet. Damit liefert also die Inversion einer nicht durch den Ursprung verlaufenden Geraden einen Ursprungskreis. Aus (0.5.32) folgt für die Beträge

$$\hat{B} = \frac{1}{\hat{A}} \quad (0.5.33)$$

und für die Winkel

$$\varphi_B = -\varphi_A. \quad (0.5.34)$$

Der Punkt  $P'_{\emptyset}$  auf der Geraden im Bild 0.5.14 mit dem Parameter  $\eta_{\emptyset}$ , der den kürzesten Abstand zum Ursprung hat, d. h. für den  $\hat{A} = \hat{A}_{\min}$  ist, bildet sich also in den zum Ursprung gehörenden Durchmesserpunkt  $P_{\emptyset}$  des Kreises mit dem gleichen Parameter  $\eta_{\emptyset}$  ab, da  $1/\hat{A}_{\min} = \hat{B}_{\max}$  ist. Dabei gilt für die Winkel, unter denen die Punkte  $P'_{\emptyset}$  und  $P_{\emptyset}$  in der komplexen Ebene erscheinen, natürlich (0.5.34). Der Durchmesser des Kreises  $\underline{B}$  liegt also auf der Senkrechten zum Ursprung der konjugiert komplexen Geraden  $\underline{A}^*$ . Bild 0.5.15 zeigt die Inversion zweier besonders markanter Geraden, von denen die erste einen konstanten Realteil und die zweite einen konstanten Imaginärteil aufweist.

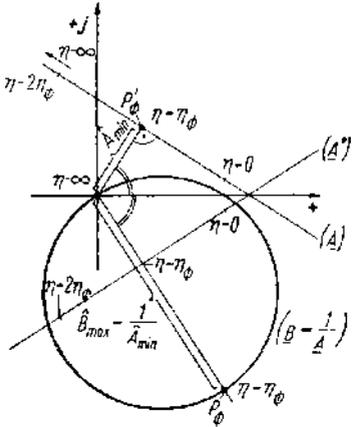


Bild 0.5.14 Ursprungskreis als Inversion  $\underline{B} = 1/\underline{A}$  einer Geraden  $\underline{A}$ .

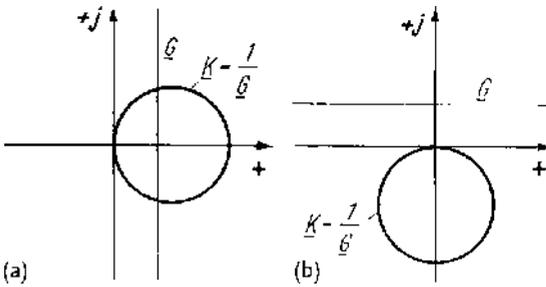


Bild 0.5.15 Inversion einer Geraden  $\underline{G}$ : (a) mit konstantem Realteil; (b) mit konstantem Imaginärteil.

Ein allgemeiner Kreis verläuft nicht durch den Ursprung, d. h. er ist gegenüber einem Ursprungskreis um irgendeinen Wert  $\underline{B}_0$  verschoben. Er genügt damit der Beziehung

$$\underline{K} = \underline{B}_0 + \frac{1}{\underline{A}_1 + \eta \underline{A}_2},$$

die sich auf die Form

$$\underline{K} = \frac{\underline{B}_1 + \eta \underline{B}_2}{\underline{A}_1 + \eta \underline{A}_2} \tag{0.5.35}$$

bringen lässt.

## 0.6

## Einführung und Eigenschaften des symmetrischen Dreiphasensystems

Drei sinusförmige Wechselgrößen  $g_a$ ,  $g_b$  und  $g_c$  bilden ein symmetrisches Dreiphasensystem positiver Phasenfolge, wenn sie bei gleicher Frequenz und gleicher Amplitude jeweils um  $2\pi/3$  gegeneinander nacheilen. Sie lassen sich wie folgt formulieren

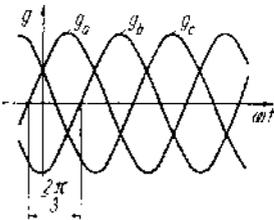
$$\left. \begin{aligned} g_a &= \hat{g} \cos(\omega t + \varphi_g) \\ g_b &= \hat{g} \cos(\omega t + \varphi_g - 2\pi/3) \\ g_c &= \hat{g} \cos(\omega t + \varphi_g - 4\pi/3) \end{aligned} \right\} . \quad (0.6.1)$$

Ihr zeitlicher Verlauf ist im Bild 0.6.1 dargestellt, während Bild 0.6.2 das zugehörige Zeigerbild zeigt.

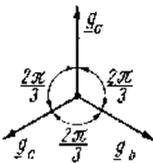
Wenn die Ströme und Spannungen dreier Zweipole je ein symmetrisches Dreiphasensystem bilden, können ihre äußeren Zuleitungen leitungssparend zusammengeschaltet werden. Dieses Zusammenschalten ist auf zwei Arten möglich: als Sternschaltung und als Dreieckschaltung. Die Einzelzweipole werden dabei als *Stränge* bezeichnet; in dem wichtigen Sonderfall, dass sie Wicklungen darstellen, spricht man auch von *Wicklungssträngen*.

Die *Sternschaltung* entsteht aus der Überlegung, dass keine Störung eintritt, wenn die drei Einzelstromkreise je eine Zuleitung gemeinsam benutzen. Diese Entwicklung wird in den Bildern 0.6.3a und b demonstriert. In dem gemeinsamen Leiter, dem sog. *Nulleiter*, der auch als *Neutralleiter* oder *Sternpunktleiter* bezeichnet wird, fließt entsprechend der Aussage des Knotenpunktsatzes auf den Sternpunkt und mit den positiven Zählpfeilrichtungen nach Bild 0.6.3b der Strom  $i_a + i_b + i_c$ . Die Summe der Ströme, die ein symmetrisches Dreiphasensystem bilden, ist jedoch immer null, wie Bild 0.6.4 zeigt. Damit kann der gemeinsame Nulleiter weggelassen werden, und man gelangt zu einer Schaltung nach Bild 0.6.3c.

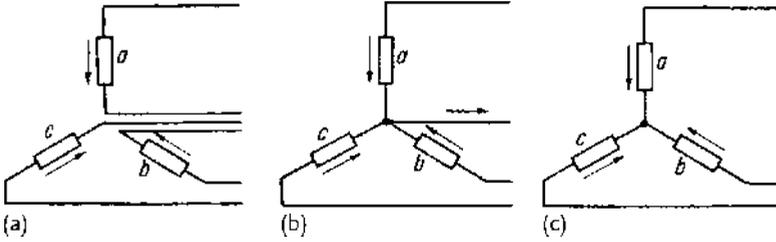
Die *Dreieckschaltung* gewinnt man ausgehend von der Überlegung, dass keine Störung auftritt, wenn zwei Kreise – im Bild 0.6.5a die Kreise  $a$  und  $c$  – je eine



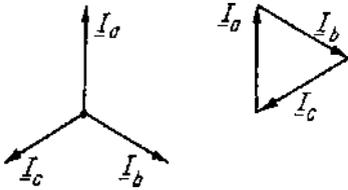
**Bild 0.6.1** Zeitlicher Verlauf der drei Wechselgrößen  $g_a$ ,  $g_b$  und  $g_c$ , die ein symmetrisches Dreiphasensystem positiver Phasenfolge bilden.



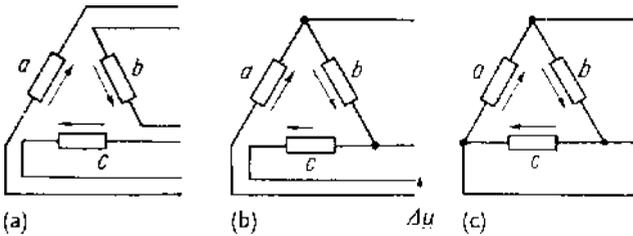
**Bild 0.6.2** Zeigerdarstellung der drei Wechselgrößen  $g_a$ ,  $g_b$  und  $g_c$ , die ein symmetrisches Dreiphasensystem positiver Phasenfolge bilden.



**Bild 0.6.3** Entwicklung der Sternschaltung: (a) Ausgangsanordnung, bestehend aus drei Zweipolen mit eigenen äußeren Zuleitungen; (b) Vereinigung je einer Zuleitung der drei Zweipole zum gemeinsamen Nullleiter; (c) Wegfall des Nullleiters wegen  $\underline{i}_a + \underline{i}_b + \underline{i}_c = 0$ .



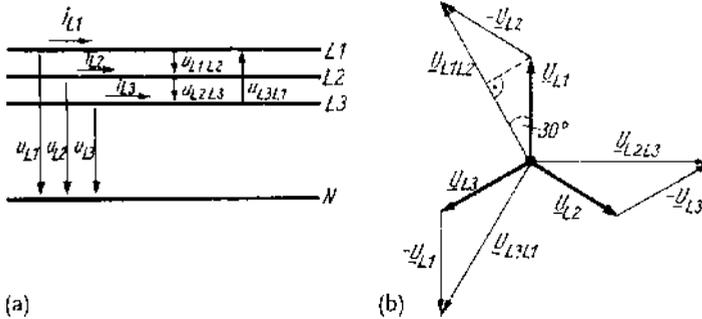
**Bild 0.6.4** Zur Ermittlung des Stroms  $\underline{i}_a + \underline{i}_b + \underline{i}_c = 0$  im gemeinsamen Nullleiter von Bild 0.6.3b.



**Bild 0.6.5** Entwicklung der Dreieckschaltung: (a) Ausgangsanordnung, bestehend aus drei Zweipolen mit eigenen äußeren Zuleitungen; (b) gemeinsame Nutzung der Zuleitung eines Kreises (b) durch je einen der beiden anderen Kreise (a und c); (c) Vereinigung der verbleibenden Einzelzuleitungen wegen  $\underline{u}_a + \underline{u}_b + \underline{u}_c = 0$ .

Zuleitung des dritten – im Bild 0.6.5a des Kreises b – mitbenutzen. Dadurch entsteht zunächst aus der Ausgangsanordnung nach Bild 0.6.5a eine Anordnung nach Bild 0.6.5b. Es verbleiben zwei Einzelzuleitungen zu den Strängen a und c, zwischen denen nach der Aussage, die der Maschensatz auf Bild 0.6.5b angewendet macht, die Spannung  $\Delta \underline{u} = \underline{u}_a + \underline{u}_b + \underline{u}_c$  auftritt. Die Summe der drei Spannungen, die ein symmetrisches Dreiphasensystem bilden, ist jedoch ebenso null, wie es im Bild 0.6.4 für die Ströme gezeigt wurde. Damit besteht zwischen den beiden übrig gebliebenen Einzelzuleitungen keine Spannungsdifferenz, sodass auch diese vereinigt werden können. Man erhält die Dreieckschaltung der Stränge nach Bild 0.6.5c.

Die Stränge werden im Folgenden mit a, b, c und die äußeren Zuleitungen mit L1, L2, L3 bezeichnet. Wenn ein Nullleiter vorhanden ist, trägt der die Bezeich-



**Bild 0.6.6** Ströme und Spannungen einer Drehstromleitung: (a) Zählpfeilfestlegung; (b) Zeigerbild der Spannungen.

nung N. Über den Strängen liegen die *Strangspannungen*  $u_a, u_b, u_c$  mit dem Effektivwert  $U_{\text{str}}$ ; sie werden von den *Strangströmen*  $i_a, i_b, i_c$  mit dem Effektivwert  $I_{\text{str}}$  durchflossen. Die äußeren Zuleitungen L führen entsprechend Bild 0.6.6a die *Leiterströme*  $i_{L1}, i_{L2}, i_{L3}$  mit dem Effektivwert  $I$ . Sie besitzen gegenüber einem vorhandenen oder gedachten Nullleiter N die *Leiter-Erde-Spannungen*  $u_{L1}, u_{L2}, u_{L3}$  mit dem Effektivwert  $U$ .<sup>6)</sup> Die Spannungen zwischen jeweils zwei Leitern sind die *Leiter-Leiter-Spannungen*  $u_{L1L2}, u_{L2L3}, u_{L3L1}$  mit dem Effektivwert  $U_{\text{LL}}$ . Bei der Angabe von Effektivwerten tragen die Leiter-Erde-Spannungen und die Leiterströme keine besondere Kennzeichnung. Sie werden, angepasst an die vorgesehene Behandlung von Dreiphasenmaschinen bei Betrieb unter symmetrischen Betriebsbedingungen, als die charakteristischen Werte des Dreiphasensystems angesehen. Die Nennspannungen von Dreiphasensystemen bzw. die Bemessungsspannungen daran zu betreibender Betriebsmittel werden stets als Leiter-Leiter-Spannungen angegeben und mit  $U_N$  bezeichnet.

Als Beziehungen zwischen den Leiter-Erde-Spannungen und den Leiter-Leiter-Spannungen erhält man aus Bild 0.6.6a

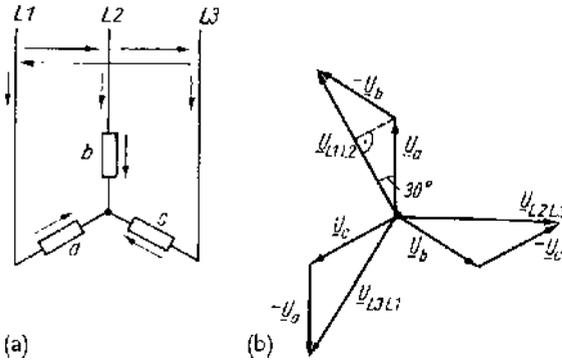
$$\left. \begin{aligned} u_{L1L2} &= u_{L1} - u_{L2} \\ u_{L2L3} &= u_{L2} - u_{L3} \\ u_{L3L1} &= u_{L3} - u_{L1} \end{aligned} \right\} \quad (0.6.2)$$

Das zugehörige Zeigerbild der Spannungen zeigt Bild 0.6.6b. Ihm entnimmt man als Beziehung zwischen den Effektivwerten

$$U_{\text{LL}} = 2U \cos 30^\circ = \sqrt{3}U. \quad (0.6.3)$$

Die Beziehungen zwischen den Stranggrößen und den Leitergrößen sind bei Stern- und Dreieckschaltung verschieden. Für die Sternschaltung nach Bild 0.6.7a erhält man aus der Anwendung des Knotenpunktsatzes die Trivialaussagen

6) Die Leiter-Erde-Spannung wird auch als Sternspannung bezeichnet.



**Bild 0.6.7** Zur Ermittlung der Beziehungen zwischen den Strang- und den Leitergrößen einer Sternschaltung: (a) Schaltung und Zählpfeilfestlegung; (b) Zeigerbild der Spannungen.

$$\dot{I}_{L1} = \dot{I}_a ; \quad \dot{I}_{L2} = \dot{I}_b ; \quad \dot{I}_{L3} = \dot{I}_c ;$$

es ist also

$$I_{\text{str}} = I . \quad (0.6.4)$$

Demgegenüber liefert der Maschensatz die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \underline{u}_{L1L2} &= \underline{u}_a - \underline{u}_b \\ \underline{u}_{L2L3} &= \underline{u}_b - \underline{u}_c \\ \underline{u}_{L3L1} &= \underline{u}_c - \underline{u}_a \end{aligned} \right\} .$$

Bild 0.6.7b zeigt das zugehörige Zeigerbild der Strang- und der Leiter-Leiter-Spannungen. Daraus entnimmt man für die Effektivwerte

$$U_{\text{str}} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\text{LL}} = U . \quad (0.6.5)$$

Für die Dreieckschaltung nach Bild 0.6.8a folgen aus der Anwendung des Maschensatzes die Trivialaussagen

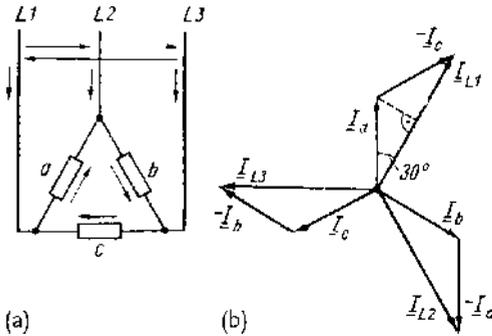
$$\underline{u}_{L1L2} = \underline{u}_a ; \quad \underline{u}_{L2L3} = \underline{u}_b ; \quad \underline{u}_{L3L1} = \underline{u}_c ;$$

es ist also

$$U_{\text{str}} = U_{\text{LL}} = \sqrt{3} U . \quad (0.6.6)$$

Demgegenüber liefert hier der Knotenpunktsatz

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{L1} &= \dot{I}_a - \dot{I}_c \\ \dot{I}_{L2} &= \dot{I}_b - \dot{I}_a \\ \dot{I}_{L3} &= \dot{I}_c - \dot{I}_b \end{aligned} \right\} .$$



**Bild 0.6.8** Zur Ermittlung der Beziehungen zwischen den Strang- und den Leitergrößen einer Dreieckschaltung: (a) Schaltung und Zählpfeilfestlegung; (b) Zeigerbild der Ströme.

Das zugehörige Zeigerbild der Strang- und der Leiterströme zeigt Bild 0.6.8b; man entnimmt ihm

$$I_{\text{str}} = \frac{1}{\sqrt{3}} I. \quad (0.6.7)$$

Die *Leistung als Augenblickswert* erhält man mit Bild 0.6.6a und (0.5.11) als über die Zuleitungen zufließende Leistung

$$p = u_{L1} i_{L1} + u_{L2} i_{L2} + u_{L3} i_{L3}$$

bzw. mit Bild 0.6.7a oder Bild 0.6.8a als die den Strängen der betrachteten Anordnung zufließende Leistung

$$p = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c.$$

Durch Einführen der Beziehungen für die Augenblickswerte der Spannungen und Ströme entsprechend (0.6.1) folgt daraus

$$p = P = 3UI \cos \varphi = \sqrt{3} U_{LL} I \cos \varphi = 3 U_{\text{str}} I_{\text{str}} \cos \varphi. \quad (0.6.8)$$

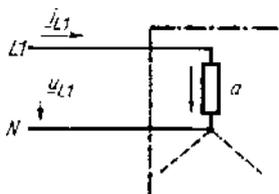
Dabei ist  $\varphi$  der für alle Zuleitungen gleiche Winkel der Phasenverschiebung zwischen Leiter-Erde-Spannung und Leiterstrom bzw. der für alle Stränge gleiche Winkel der Phasenverschiebung zwischen Strangspannung und Strangstrom. Die doppeltfrequenten Leistungsanteile heben sich heraus, da sie um jeweils  $4\pi/3$  gegeneinander phasenverschoben sind. Der Augenblickswert der Gesamtleistung ist demnach konstant und gleich der Gesamtwirkleistung.

In formaler Übernahme der Beziehungen zwischen (0.5.12) und (0.5.14), d. h.  $P = P_s \cos \varphi$ , bzw. (0.5.15), d. h.  $P_q = P_s \sin \varphi$ , wird ausgehend von (0.6.8) als *Scheinleistung des Dreiphasensystems* eingeführt

$$P_s = 3UI = \sqrt{3} U_{LL} I = 3 U_{\text{str}} I_{\text{str}} \quad (0.6.9)$$

und als *Blindleistung des Dreiphasensystems*

$$P_q = 3UI \sin \varphi = \sqrt{3} U_{LL} I \sin \varphi = 3 U_{\text{str}} I_{\text{str}} \sin \varphi. \quad (0.6.10)$$



**Bild 0.6.9** Einphasige Ersatzanordnung einer symmetrischen Dreiphasenanordnung.

Da die Gesamtleistung in jedem Augenblick gleich der Gesamtwirkleistung ist und der Verlauf  $p = f(t)$  damit bereits vollständig beschrieben ist, haben (0.6.9) und (0.6.10) nur Sinn als  $P_s = 3P_{str\ s} = 3P_{L\ s}$  und  $P_q = 3P_{str\ q} = 3P_{L\ q}$ .

Aufgrund der Beziehungen zwischen den drei Größen eines symmetrischen Dreiphasensystems genügt es, bei symmetrischen Anordnungen in der Zuleitung einen Leiter als Bezugsleiter und in der betrachteten Anordnung einen Strang als Bezugsstrang zu betrachten. Als Bezugsleiter wird der Leiter L1 und als Bezugsstrang der Strang  $a$  benutzt. Um einfache Beziehungen zu erhalten, denkt man sich die betrachtete Anordnung entsprechend Bild 0.6.9 in Stern geschaltet – wozu eventuell eine Dreieck-Stern-Umformung erforderlich ist – und den Leiter L1 mit dem Strang  $a$  verbunden. Außerdem kann auf die Kennzeichnung der zugehörigen Ströme und Spannungen verzichtet werden, sodass mit Bild 0.6.9

$$\underline{u} = \underline{u}_{L1} = \underline{u}_a; \quad \underline{i} = \underline{i}_{L1} = \underline{i}_a$$

gilt. Auf diese Weise wird später bei der Behandlung des Betriebs von Dreiphasenmaschinen unter symmetrischen Betriebsbedingungen stets vorgegangen.

Es ist zu beachten, dass das Zusammenschalten dreier Einphasensysteme zu einem Dreiphasensystem unter der Voraussetzung vollständiger Symmetrie vorgenommen wurde. Wenn diese Symmetrie gestört ist, muss mit dem Auftreten neuartiger, spezifischer Erscheinungen gerechnet werden.

## 0.7

### Einführung symmetrischer Komponenten

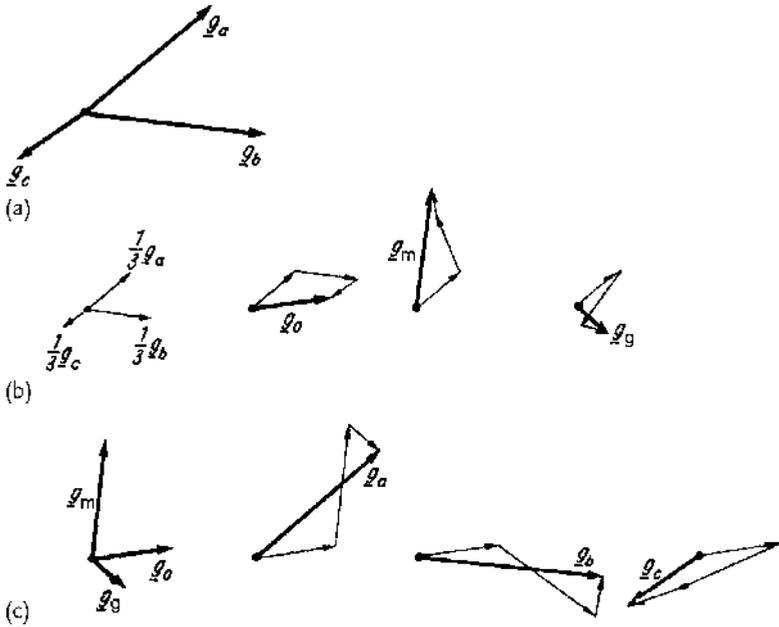
Einem unsymmetrischen System der drei Stranggrößen  $\underline{g}_a, \underline{g}_b, \underline{g}_c$ , wie es z. B. Bild 0.7.1a zeigt, bzw. auch einem solchen der drei Leitergrößen  $\underline{g}_{L1}, \underline{g}_{L2}, \underline{g}_{L3}$  lassen sich folgende symmetrische Komponenten zuordnen:

- ein *Nullsystem* entsprechend Bild 0.7.2a, bestehend aus drei nach Betrag und Phase gleichen Komponenten

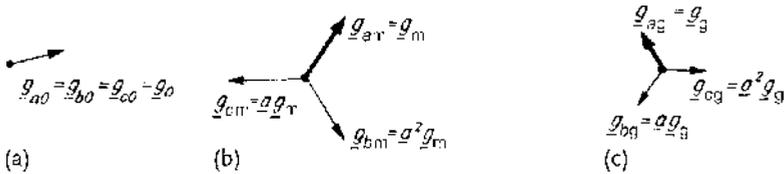
$$\underline{g}_{a0} = \underline{g}_0, \quad \underline{g}_{b0} = \underline{g}_0, \quad \underline{g}_{c0} = \underline{g}_0;$$

- ein *Mitsystem* entsprechend Bild 0.7.2b, bestehend aus drei Komponenten, die ein symmetrisches Dreiphasensystem positiver Phasenfolge bilden,

$$\underline{g}_{am} = \underline{g}_m, \quad \underline{g}_{bm} = \underline{a}^2 \underline{g}_m, \quad \underline{g}_{cm} = \underline{a} \underline{g}_m$$



**Bild 0.7.1** Unsymmetrisches Dreiphasensystem: (a) Stranggrößen  $\underline{g}_a, \underline{g}_b, \underline{g}_c$ ; (b) grafische Ermittlung der symmetrischen Komponenten  $\underline{g}_0, \underline{g}_m, \underline{g}_g$  aus den Stranggrößen  $\underline{g}_a, \underline{g}_b, \underline{g}_c$  entsprechend (0.7.1); (c) grafische Ermittlung der Stranggrößen  $\underline{g}_a, \underline{g}_b, \underline{g}_c$  aus den symmetrischen Komponenten  $\underline{g}_0, \underline{g}_m, \underline{g}_g$  entsprechend (0.7.2).



**Bild 0.7.2** Symmetrische Komponenten: (a) Nullsystem; (b) Mitsystem; (c) Gegensystem.

mit

$$\underline{a} = e^{j2\pi/3}, \quad \underline{a}^2 = e^{j4\pi/3} = e^{-j2\pi/3};$$

- ein *Gegensystem* entsprechend Bild 0.7.2c, bestehend aus drei Komponenten, die ein symmetrisches Dreiphasensystem negativer Phasenfolge bilden,

$$\underline{g}_{ag} = \underline{g}_g, \quad \underline{g}_{bg} = \underline{a}\underline{g}_g, \quad \underline{g}_{cg} = \underline{a}^2\underline{g}_g.$$

Die Stranggrößen  $\underline{g}_a, \underline{g}_b, \underline{g}_c$ , die ein beliebig unsymmetrisches System bilden, lassen sich also durch ihre symmetrischen Komponenten  $\underline{g}_0, \underline{g}_m$  und  $\underline{g}_g$  aus-

drücken. Die Transformationsbeziehungen lauten in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} \underline{g}_0 \\ \underline{g}_m \\ \underline{g}_g \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{g}_a \\ \underline{g}_b \\ \underline{g}_c \end{pmatrix}, \quad (0.7.1)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{g}_a \\ \underline{g}_b \\ \underline{g}_c \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{g}_0 \\ \underline{g}_m \\ \underline{g}_g \end{pmatrix}. \quad (0.7.2)$$

Im Bild 0.7.1b sind die symmetrischen Komponenten zu den Stranggrößen nach Bild 0.7.1a grafisch entsprechend (0.7.1) ermittelt worden. Umgekehrt zeigt Bild 0.7.1c, wie aus den symmetrischen Komponenten die Stranggrößen durch Anwenden von (0.7.2) entstehen.

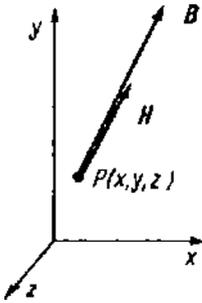
Die Einführung der symmetrischen Komponenten bietet dann Vorteile, wenn die Spannungsgleichungen der Betriebsmittel im Bereich der symmetrischen Komponenten in drei voneinander unabhängige Spannungsgleichungen des Null-, des Mit- und des Gegensystems entarten. Voraussetzung dafür ist ein symmetrischer Aufbau der Betriebsmittel hinsichtlich der elektromagnetisch aktiven Bauteile wie Wicklungen, magnetische Kreise usw. Das wiederum trifft für die meisten elektrischen Maschinen und Transformatoren zu. Deshalb spielt die Methode der symmetrischen Komponenten dort eine so große Rolle.

## 0.8

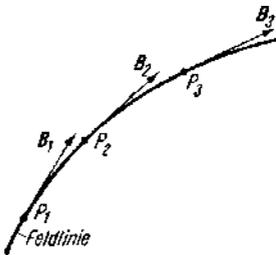
### Darstellung magnetischer Felder

Um magnetische Felder quantitativ bestimmen zu können, ist es in den meisten realen Fällen eigentlich erforderlich, von den Differenzialformen des Durchflutungsgesetzes und des Gesetzes der Quellenfreiheit der magnetischen Felder auszugehen und diese partiellen Differenzialgleichungen unter den gegebenen Randbedingungen zu lösen. Die Analyse der elektrischen Maschinen soll jedoch innerhalb des vorliegenden Buchs ohne ein derartiges Vorgehen durchgeführt werden. Das ist möglich, weil sich ein Teil der Felder wenigstens näherungsweise unmittelbar mit Hilfe der Integralform der Gesetze bestimmen lässt und der andere Teil nur qualitativ bekannt sein muss, um Induktivitäten als Proportionalitätsfaktoren zwischen den interessierenden Flussverkettungen und den sie verursachenden Strömen einführen zu können. Dabei kann allerdings auf eine Möglichkeit zur anschaulichen Darstellung der Felder nicht verzichtet werden. Eine derartige Möglichkeit besteht zumindest für die in erster Linie interessierenden ebenen Felder, d. h. für Felder, deren Feldgrößen nur Funktionen von zwei Ortskoordinaten sind.

Das magnetische Feld wird in jedem Punkt des Raums durch die dort herrschende *Induktion*  $\mathbf{B}$  bzw. die dort herrschende *magnetische Feldstärke*  $\mathbf{H}$  beschrieben. Dabei besteht zwischen den Beträgen der beiden Vektoren ein Zusammenhang,



**Bild 0.8.1** Beschreibung des magnetischen Felds in einem Punkt  $P$  durch Angabe des Vektors  $B$  bzw. des Vektors  $H$ .



**Bild 0.8.2** Zur Definition der Feldlinie als Raumkurve, deren Tangente in jedem Punkt mit der Richtung der dort herrschenden Induktion übereinstimmt.

der durch (0.4.14) bzw. bei ferromagnetischen Stoffen durch eine Hystereseschleife gegeben ist, während ihre Richtungen übereinstimmen (s. Bild 0.8.1).<sup>7)</sup>

Eine *Feldlinie* ist eine Raumkurve, deren Tangente in jedem Punkt mit der Richtung der dort herrschenden Induktion übereinstimmt (s. Bild 0.8.2). Man erhält eine derartige Raumkurve, indem von jedem Punkt aus so um das Linienelement  $ds$  fortgeschritten wird, dass stets  $B \times ds = 0$  wird.

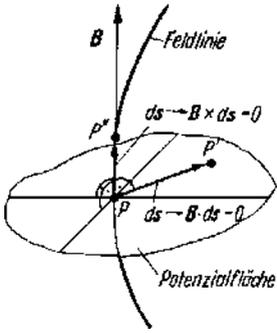
Eine *Potenzialfläche* verbindet alle Punkte des Raums, die gleiches magnetisches Potenzial haben, d. h. zwischen denen keine magnetischen Spannungsabfälle bestehen. Auf einer Potenzialfläche gilt also zwischen beliebigen Punkten

$$\int H \cdot ds = 0 .$$

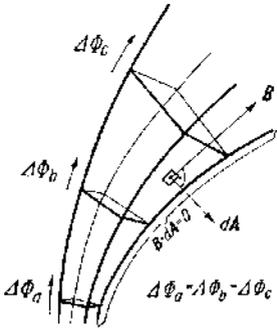
Man gelangt von einem Punkt einer derartigen Potenzialfläche zu einem Nachbarpunkt auf dieser Fläche, indem so um das Linienelement  $ds$  fortgeschritten wird, dass  $H \cdot ds = 0$  bzw.  $B \cdot ds = 0$  ist (s. Bild 0.8.3). Es muss also senkrecht zur Richtung von  $B$ , d. h. senkrecht zur Feldlinie durch den betrachteten Punkt fortgeschritten werden. Die Feldlinien durchstoßen die Potenzialflächen senkrecht.

Eine *Flussröhre* ist ein Ausschnitt des betrachteten Raums, dessen Seitenflächen überall durch Feldlinien begrenzt sind. Damit tritt durch die Seitenflächen einer Flussröhre entsprechend  $\int B \cdot dA = 0$  kein Fluss. Die Quellenfreiheit des magnetischen Felds nach (0.4.6) erfordert dann, dass in jedem Querschnitt der Flussröhre der gleiche Fluss vorhanden ist. Im Bild 0.8.4 ist eine Flussröhre mit rechteckigem Querschnitt dargestellt. Um die Übersichtlichkeit nicht zu stören, wurden dabei

7) s. Fußnote 3 im Abschn. 0.4.



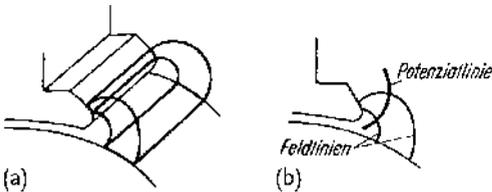
**Bild 0.8.3** Erläuterung der Überlegung, dass die Potenzialflächen von den Feldlinien senkrecht durchstoßen werden.



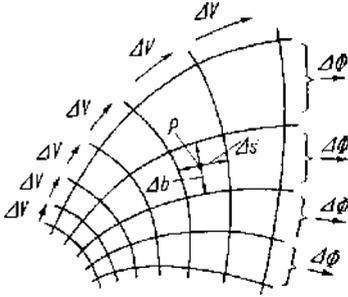
**Bild 0.8.4** Zur Definition der Flussröhre.

nur jene Feldlinien eingezeichnet, die als Kanten der Flussröhre in Erscheinung treten.

Das ebene Feld ist nur von zwei Ortskoordinaten – z. B.  $x$  und  $y$  – abhängig; es besteht keine Abhängigkeit von der dritten Ortskoordinate. Ebene Felder entstehen, wenn diese besondere Art der Ortsabhängigkeit auch für die Geometrie der Anordnung gilt, die für die Randbedingungen verantwortlich ist. Das ist offensichtlich bei allen zylindrischen, unendlich langen Anordnungen der Fall. Zylindrische Anordnungen mit endlicher Länge können näherungsweise als Ausschnitt der entsprechenden unendlich langen Anordnung betrachtet werden. Das trifft z. B. auch für die rotierenden elektrischen Maschinen zu. Aufgrund der Gleichberechtigung sämtlicher  $x$ - $y$ -Ebenen ist es sinnvoll, Flussröhren mit rechteckigem Querschnitt zu verwenden, die dem ebenen Problem angepasst sind (s. Bild 0.8.5a). In einer der gleichberechtigten  $x$ - $y$ -Ebenen, die als Darstellungsebene benutzt wird, erscheinen



**Bild 0.8.5** Ebenes Feldproblem: (a) angepasste Flussröhre; (b) Spur der angepassten Flussröhre und Spur einer Potenzialfläche in der Darstellungsebene.



**Bild 0.8.6** Zur Einführung der ausgewählten Feldlinien und der ausgewählten Potenziellinien.

dann als Spur der Seitenflächen einer Flussröhre zwei Feldlinien. Die Spuren der Potenziellflächen werden als *Potenziellinien* oder *Äquipotenziallinien* bezeichnet (s. Bild 0.8.5b). Sie schneiden die Feldlinien überall senkrecht, da die Feldlinien die Potenziellflächen senkrecht durchstoßen.

Prinzipiell lassen sich in die Darstellungsebene beliebig viele Potenziellinien und beliebig viele Feldlinien einzeichnen. Um eine sinnvolle Einschränkung vornehmen zu können, ist es erforderlich, ein Auswahlprinzip festzulegen. *Ausgewählte Feldlinien* bilden in der Darstellungsebene die Spuren solcher angepasster Flussröhren, die gleiche Teilflüsse  $\Delta\Phi$  führen. Zwischen aufeinanderfolgenden *ausgewählten Potenziellinien* herrschen gleiche magnetische Spannungsabfälle  $\Delta V$ . Bild 0.8.6 zeigt den Ausschnitt eines Feldbilds mit ausgewählten Feldlinien und ausgewählten Potenziellinien. Wenn man einen Flussröhrenabschnitt mit dem Fluss  $\Delta\Phi$  und dem magnetischen Spannungsabfall  $\Delta V$  als etwa rechteckig ansieht, was bei hinreichend feiner Unterteilung stets möglich ist, gilt

$$\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}\right) = \frac{\Delta b l B}{\Delta s H} = \mu l \left(\frac{\Delta b}{\Delta s}\right), \quad (0.8.1)$$

wobei  $l$  die Länge der betrachteten Anordnung in Richtung der Ortskoordinate  $z$  ist. Aus (0.8.1) folgt, dass mit  $\Delta\Phi/\Delta V = \text{konst.}$  auch  $\Delta b/\Delta s$  für alle Flussröhrenabschnitte konstant sein muss. Wählt man  $\Delta b/\Delta s = 1$ , so wird

$$\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}\right) = \mathcal{A}_{\text{Flussröhrenabschnitt}} = \mu l, \quad (0.8.2)$$

und das Feldbild besteht aus einem *Netz quadratähnlicher Figuren*.

Die *Randbedingungen* sind gewöhnlich dadurch gegeben, dass die Oberflächen von ferromagnetischen Teilen bei  $\mu_{\text{Fe}} = \infty$  Potenziellflächen darstellen, denn mit  $\mu_{\text{Fe}} = \infty$  wird  $H_{\text{Fe}} = 0$ , sodass auch auf der Oberfläche keine magnetischen Spannungsabfälle existieren können. Die Feldlinien treten in diesem Fall senkrecht in die Randkurve ein. Wenn die Oberfläche des ferromagnetischen Körpers einen *Strombelag*  $A$  führt, d. h. wenn dort eine flächenhafte Strömung vorliegt, liefert das Durchflutungsgesetz mit Bild 0.8.7  $H_t ds = A ds$ , d. h.

$$\text{bzw. } \left. \begin{array}{l} H_t = A \\ B_t = \mu A \end{array} \right\} \quad (0.8.3)$$

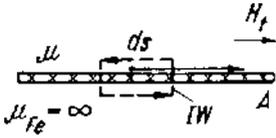


Bild 0.8.7 Zur Ermittlung der Randbedingungen an einer Oberfläche mit Strombelag.

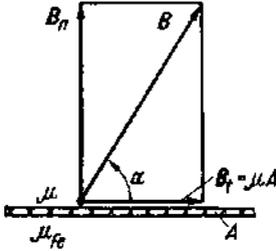


Bild 0.8.8 Zur Ermittlung des Austrittswinkels der Feldlinien an Oberflächen mit Strombelag.

Dann existieren also auf der Oberfläche außer den Normalkomponenten  $B_n$  und  $H_n$  auch Tangentialkomponenten  $B_t$  und  $H_t$  der Feldgrößen. Die Feldlinien treten nicht mehr senkrecht aus der Randkurve aus, sondern, wie im Bild 0.8.8 gezeigt, unter einem Winkel

$$\alpha = \arctan \frac{B_n}{\mu A} .$$

Die Auswertung eines Feldbilds kann in verschiedener Weise vorgenommen werden. Das wird im Bild 0.8.9 demonstriert. Wenn der Fluss  $\Delta \Phi$  je Flussröhre bekannt ist, erhält man die mittlere Induktion über einer Flussröhre mit der mittleren Breite  $\Delta b$  als

$$B = \frac{\Delta \Phi}{\Delta b l} . \quad (0.8.4)$$

Diese Induktion wird dem Mittelpunkt des betrachteten Querschnitts zugeordnet. Analog dazu erhält man die magnetische Feldstärke bei bekanntem Spannungsabfall  $\Delta V$  zwischen aufeinanderfolgenden Potenziellinien, die den mittleren Abstand  $\Delta s$  zueinander haben, als

$$H = \frac{\Delta V}{\Delta s} . \quad (0.8.5)$$

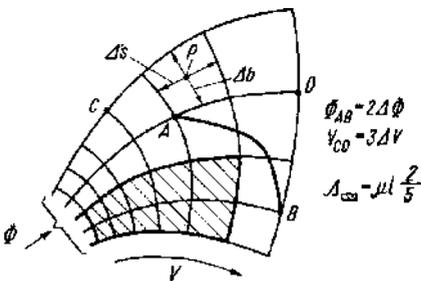


Bild 0.8.9 Auswertung eines Feldbilds.

Sowohl (0.8.4) als auch (0.8.5) bringen zum Ausdruck, dass große Induktionswerte bzw. Feldstärken dort herrschen, wo die Darstellungsdichte der ausgewählten Feldlinien bzw. der ausgewählten Potenziellinien groß ist.

Den Fluss  $\Phi$  durch eine Fläche, deren Spur in der Darstellungsebene zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  verläuft, erhält man über die Anzahl  $n_\Phi$  von Flussröhren, die zwischen  $A$  und  $B$  hindurchtreten, zu

$$\Phi = n_\Phi \Delta \Phi . \quad (0.8.6)$$

Den magnetischen Spannungsabfall  $V$  zwischen den Punkten  $C$  und  $D$  erhält man über die Anzahl von Potenzialstufen  $n_V$ , die zwischen diesen Punkten liegen, als

$$V = n_V \Delta V . \quad (0.8.7)$$

Der magnetische Leitwert  $\mathcal{A}$  eines Abschnitts zwischen zwei Potenzialflächen, der von zwei Feldlinien begrenzt wird, ergibt sich mit (0.8.6) und (0.8.7) sowie mit (0.8.2) zu

$$\mathcal{A} = \frac{\Phi}{V} = \frac{n_\Phi}{n_V} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \mu l \frac{n_\Phi}{n_V} . \quad (0.8.8)$$