



Leseprobe

Ines Rennert, Bernhard Bundschuh

Signale und Systeme

Einführung in die Systemtheorie

ISBN (Buch): 978-3-446-43327-4

ISBN (E-Book): 978-3-446-43328-1

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43327-4>

sowie im Buchhandel.

3

Deterministische kontinuierliche Signale im Zeitbereich

■ 3.1 Wie kann man Signale im Zeitbereich darstellen?

Die Darstellung des simulierten Spannungsverlaufs $u(t)$ im Bild 3.1 ist dem Kurvenverlauf auf dem Bildschirm eines Oszilloskops nachempfunden.

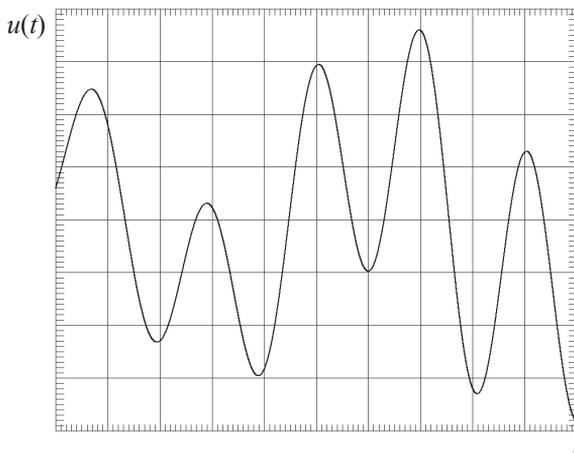


Bild 3.1 Kontinuierlicher Spannungsverlauf

Aus dem Kurvenverlauf lassen sich einige Informationen über das Signal gewinnen, z. B. die zeitliche Dauer (falls endlich), der Wertebereich, die Lage der Nulldurchgänge und der Extremwerte. Eine genauere Analyse ermöglicht evtl. auch eine Ermittlung der Frequenzzusammensetzung des Signals. Die komplette Information ist im Kurvenverlauf $u(t)$ (physikalisch z. B. $1 \text{ V} \cdot \cos(2\pi f_p t)$ bzw. $x(t)$ systemtheoretisch z. B. $\cos(2\pi f_p t)$) enthalten.

■ 3.2 Elementarsignale

Elementarsignale stellen einfache und idealisierte Signale dar, die jedoch den großen Vorteil einfacher mathematischer Handhabbarkeit besitzen. Man denke an die Berechnung von Integralen, wie sie im Zusammenhang mit Signaloperationen vorkommen. Bei Verwendung von Elementarsignalen verringert sich der Aufwand für die Integration ganz erheblich.

Wenn man analytisch rechnen will, verwendet man Elementarsignale einzeln oder in Kombination zur vereinfachten Nachbildung praktisch auftretender Signale. Dabei ist immer zu beachten, dass durch die Idealisierungen bei Verwendung von Elementarsignalen keine zu großen Fehler entstehen dürfen. Bild 3.2 illustriert die Problematik.

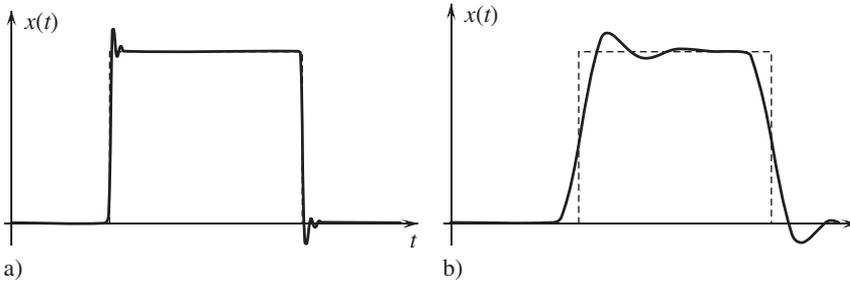


Bild 3.2 Gemessene Signalverläufe; a) gute Approximation durch Rechteck, b) ungenaue Approximation durch Rechteck

Betrachtet man den gemessenen Signalverlauf im Bild 3.2a, so erkennt man, dass ein Ersetzen der Messkurve durch eine idealisierte Rechteckfunktion unkritisch sein sollte. Das Signal im Bild 3.2b würde durch eine Rechteckfunktion jedoch nur grob angenähert.

Konstantes Signal

Gleichspannung oder Gleichstrom lassen sich beispielsweise als konstante Signale darstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man den Wert des einheitenlosen Signals $x(t)$ zu 1 annehmen.

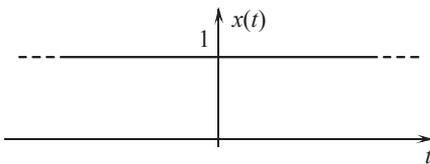


Bild 3.3 Konstantes Signal $x(t) = 1$

Einheitssprung $\varepsilon(t)$

Der Einheitssprung lässt sich sehr gut verwenden, um Ein- bzw. Ausschaltvorgänge zu modellieren. Bild 3.4 zeigt eine mögliche Anwendung.

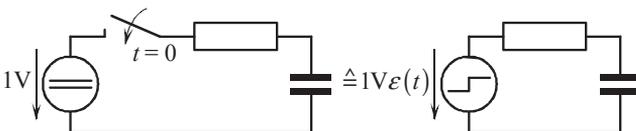


Bild 3.4 Modellierung eines Einschaltvorgangs

Die folgende einfache abschnittsweise Definition ist für praktische Anwendungen im Allgemeinen völlig ausreichend:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Hinweis: Man darf sich unter $\varepsilon(t)$ keine analytische Funktion vorstellen wie etwa die Kosinusfunktion, die Logarithmusfunktion o. Ä., sondern es handelt sich um eine symbolische Kurzschreibweise für die abschnittsweise Definition nach Gl. (3.1). Bild 3.5 zeigt den zeitlichen Verlauf der Funktion.

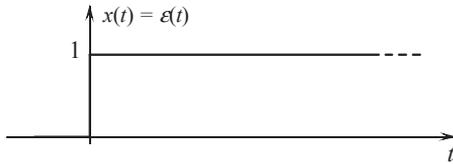


Bild 3.5 Einheitssprung

Rechteckfunktion $\text{rect}(t/T)$

Rechteckförmige Signalverläufe treten z. B. bei kombinierten Ein- und Ausschaltvorgängen auf. Sie stellen auch eine typische Signalform im Rahmen der Impulstechnik dar. Bild 3.6 zeigt den Zeitverlauf der elementaren Rechteckfunktion und veranschaulicht ihre Definition als Differenz zweier gegeneinander verschobener Einheitssprünge.

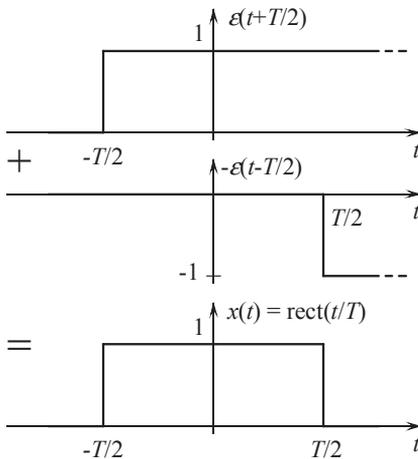


Bild 3.6 Rechteckfunktion

Die Zeitverschiebungen und die Spiegelung des Signals $\varepsilon(t - T/2)$ an der Zeitachse stellen erste Beispiele von Signaloperationen dar. Im Abschnitt 3.3 werden diese Signaloperationen neben anderen noch eingehender erläutert.

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \varepsilon\left(t + \frac{T}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) \tag{3.2}$$

Die symbolische Bezeichnung $\text{rect}(t/T)$ stammt vom lateinischen „*rectangula*“. Man darf sich darunter auch hier keine analytische Funktion vorstellen, sondern es handelt sich wieder um eine symbolische Kurzschreibweise für die abschnittsweise Definition des Signals!

Ausgehend von der in Gl. (3.1) angegebenen abschnittswisen Definition des Einheitssprungs erhält man folgende Definition der Rechteckfunktion.

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -T/2 \\ 1 & \text{für } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{für } t > T/2. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dirac-Impuls $\delta(t)$

Häufig wird in Lehrbüchern die folgende einfache, für praktische Anwendungen ausreichende, aber mathematisch nicht rigorose Herleitung verwendet.

Ausgangspunkt ist die Rechteckfunktion $T^{-1} \cdot \text{rect}(t/T)$. Aus Bild 3.7 liest man ab, dass die Fläche unter der Funktion gleich 1 sein muss (Breite T · Höhe $1/T$). Wenn man nun den Wert von T immer weiter verkleinert, bleibt die Fläche gleich eins, da die Höhe reziprok zur Breite des Rechtecks immer weiter anwächst.

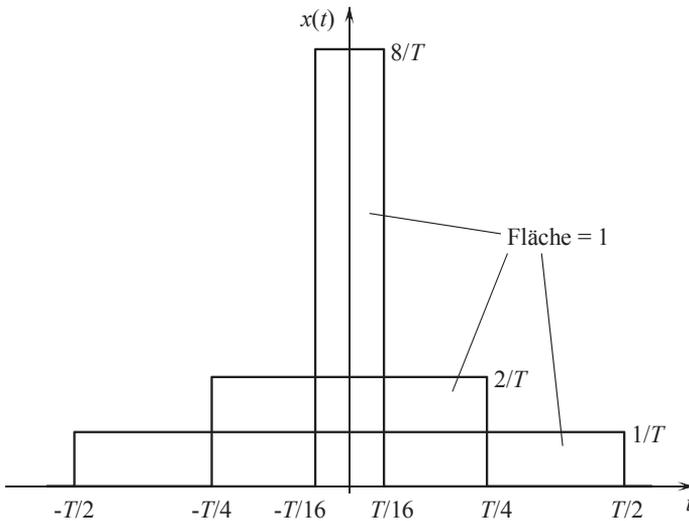


Bild 3.7 Rechteckfunktionen mit konstanter Fläche = 1

Führt man nun den Grenzübergang

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (3.4)$$

durch, so entsteht ein Impuls, der als *Dirac-Impuls*, *Dirac-Stoß*, *Deltafunktion* oder *Dirac'sche Deltafunktion* bezeichnet wird. Seine Dauer geht gegen 0 und seine Höhe gegen ∞ . Der Name erinnert an den Physiker *Paul Dirac*, der wichtige Beiträge zur Quantenmechanik geleistet und das Signal in diesem Zusammenhang eingeführt hat.

Als grafische Darstellung hat sich der im Bild 3.8 zu erkennende Pfeil nach oben eingebürgert. Er symbolisiert die Höhe des Impulses, die gegen ∞ geht. Die vorher erwähnte konstante Fläche = 1 wird nach dem Grenzübergang als Gewicht oder Gewichtungsfaktor bezeichnet. Dies schreibt man in Klammern neben die Spitze des Pfeils. Andere Gewichtungsfaktoren können ebenfalls in der Klammer stehen, z. B. (-1) bei einem ins Negative reichenden Dirac-Impuls.

Eine einfache abschnittsweise Definition des Dirac-Impulses könnte nun folgendermaßen lauten:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

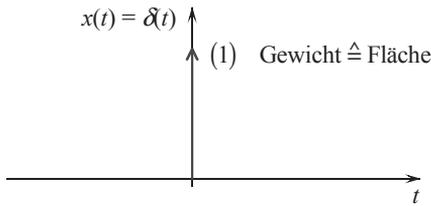


Bild 3.8 Symbolische Darstellung des Dirac-Impulses

Die ungewöhnliche Definition wirft folgende Fragen auf:

1. Wie kann man das so definierte Signal mathematisch handhaben?
2. Wie ist das Gewicht des Dirac-Impulses in der abschnittswisen Definition enthalten?

Letztendlich stellt der Dirac-Impuls keine mathematische Funktion im eigentlichen Sinn dar, sondern eine sogenannte *Distribution*. Die Distributionentheorie [27] soll im vorliegenden Buch jedoch nicht behandelt werden.

Eine Definition des Dirac-Impulses, die die Fragen 1. und 2. vermeidet, lässt sich durch einfache Überlegungen nach Bild 3.9 ermitteln. Anzumerken ist hier erneut, dass die mathematische Herleitung nicht rigoros ist, für praktische Anwendungen jedoch ausreicht. Voraussetzung hierfür ist, dass das Signal $x(t)$ bei t_0 stetig ist, was bei „praktischen“ Signalen immer gegeben ist.

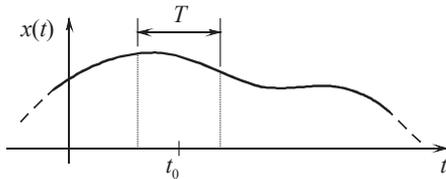


Bild 3.9 Anschauliche Definition des Dirac-Impulses

Der Mittelwert des Signals $x(t)$ in einem Zeitintervall der Dauer T symmetrisch um den Zeitpunkt t_0 lässt sich mit folgendem Integral berechnen:

$$\bar{x}(t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t) dt \tag{3.6}$$

Unter Verwendung der Rechteckfunktion lässt sich formal eine Integration von $-\infty$ bis ∞ durchführen. Die Signalanteile außerhalb des Rechtecks werden dabei unterdrückt und liefern somit keinen Beitrag zum Integral.

$$\bar{x}(t_0) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) dt \tag{3.7}$$

Wenn man nun die Breite T der Rechteckfunktion gegen 0 gehen lässt, so strebt der Mittelwert im *Zeitintervall* gegen den Signalwert zum *Zeitpunkt* t_0 . Voraussetzung ist die vorher angegebene Stetigkeit von $x(t)$ bei $t = t_0$.

$$x(t_0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \underbrace{\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)}_{\delta(t-t_0)} dt \tag{3.8}$$

In dieser Gleichung taucht wieder der oben erläuterte Grenzübergang auf, der von der Rechteckfunktion zum Dirac-Impuls führt. Die formal korrekte Definitionsgleichung des Dirac-Impulses lautet damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0). \tag{3.9}$$

Man spricht bei dieser Definitionsgleichung auch von der Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses. Alle Signalwerte außer $x(t_0)$ werden ausgeblendet bzw. unterdrückt. Diese Definition mittels eines Integrals ist charakteristisch für Distributionen.

Betrachtet man nur das Produkt unter dem Integral, so erhält man die Multiplikationseigenschaft des Dirac-Impulses.

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) \tag{3.10}$$

Bild 3.10 veranschaulicht diese einfache Beziehung

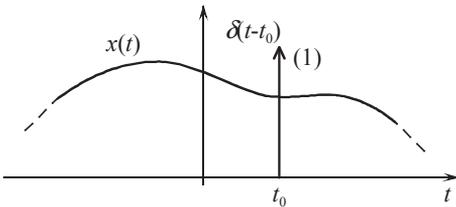


Bild 3.10 Produkt aus kontinuierlichem Signal und Dirac-Impuls

Für alle Zeitpunkte $t \neq t_0$ ist der Signalwert des Dirac-Impulses gleich null. Somit wird das Signal nur zu diesem einen Zeitpunkt, nämlich $t = t_0$, mit einem Zahlenwert ungleich null multipliziert und nur dieser eine Zahlenwert wird im Produkt wirksam. Zu beachten ist, dass das Signal $x(t)$ bei t_0 stetig sein muss.

Technisch lässt sich der Dirac-Impuls natürlich nicht erzeugen. Dennoch kann es vorteilhaft sein, mit Dirac-Impulsen zu rechnen, z. B. bei der Beschreibung der periodischen Fortsetzung eines Signals durch Faltung mit einer Dirac-Impulsfolge wie sie im Bild 3.38 dargestellt wird. Eine andere Anwendung ist die mathematische Beschreibung von Abtastvorgängen wie im Abschnitt 6.1. Eine praktisch ausreichende Nachbildung des Dirac-Impulses wird durch einen kurzen Impuls erreicht, dessen Dauer sehr viel kleiner ist als die Zeitkonstanten in einem System, an dessen Eingang der Impuls angelegt wird. Bild 3.11 zeigt eine einfache Anordnung dieser Art mit dem Eingangssignal $u_e(t)$ und einem schematisch dargestellten Ausgangssignal $u_a(t)$.

Beispiel 3.1 Übergang des Eingangssignals von der Rechteckfunktion zum Dirac-Impuls

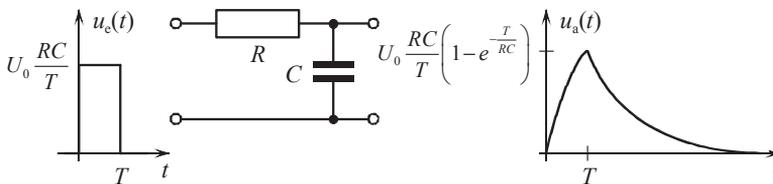


Bild 3.11 RC-Schaltung mit Rechteckimpuls als Eingangssignal