1 Einleitung

> „Die Geschichte der Naturwissenschaft zeigt, dass der Fortschritt der Naturwissenschaft immer wieder durch den tyrannischen Einfluss gewisser Vorstellungen gehemmt worden ist, die man letztlich als Dogmen ansehen musste. Aus diesem Grunde ist es sinnvoll, die Prinzipien regelmäßig gründlich zu überprüfen, die man letztlich akzeptiert hatte, ohne sie weiter zu diskutieren."
> [5, L. de Broglie, S. 142]

> „Was es wirklich bedeutet, eine Gleichung zu verstehen – d.h. in mehr als in streng mathematischem Sinn – ist von Dirac beschrieben worden. Er sagte: 'Ich verstehe, was eine Gleichung aussagt, wenn ich eine Möglichkeit habe, das Charakteristische ihrer Lösung herauszubekommen, ohne sie wirklich zu berechnen.' D.h. wenn wir eine Möglichkeit haben, herauszubekommen, was in einer gegebenen Situation passieren sollte ohne die Gleichungen wirklich zu berechnen, dann 'verstehen' wir die Gleichungen bezogen auf diese Situation. Ein physikalisches Verstehen ist ein völlig unmathematisches, ungenaues und unexaktes Ding, aber für einen Physiker absolut notwendig."
> [19, Feynman, Vol. II, S. 2-1]

Das Gleiche gilt zunächst für Vorschläge zur Lösung von bislang ungelösten Problemen. Man muss nach de Broglie auch bis heute als gültig akzeptierte Prinzipien überprüfen und möglicherweise sogar infrage stellen. Die strenge, mathematische Ausformulierung kann nach Feyman vielleicht erst nach ungenauen und unexakten Vorschlägen in Angriff genommen werden.

1.1 Ausgangssituation, Zielsetzung des Buches und kurzer Überblick

> „Newton glaubte, dass Licht aus Teilchen bestehe - den 'Korpuskeln', wie er sie nannte - und er hatte Recht (wenn seine Beweisführung auch falsch war). Heute wissen wir, dass Licht in der Tat aus Teilchen besteht. Wir verfügen nämlich über ein hochempfindliches Instrument, das bei Lichteinfall klickt. Verdunkeln wir das einfallende Licht, so klickt die Apparatur gleich laut weiter, nur seltener. Man könnte das Licht also mit Regentropfen vergleichen, die wir in diesem Fall Photonen nennen. Ist unser Licht einfarbig, sind alle 'Regentropfen' gleich groß." [21, Feynman, S. 24]

Seit dem Ende des 19. Jahrhunderts bzw. dem Beginn des 20. Jahrhunderts ist eindeutig nachgewiesen, dass alles, was ist, **dass das gesamte Sein aus Quanten aufgebaut ist: Gesellschaften aus Individuen, Sprache aus Wörtern, Schrift aus Zeichen, Lebewesen aus Zellen, Materie aus Atomen (Erde) bzw. aus Elementarteilchen (Sonne),**

elektromagnetische Felder aus Photonen und folglich auch Gravitationsfelder aus Gravitonen. Bezogen auf die Physik müssen diese Quanten stets eine Masse/Energie und/oder Impuls haben. Das ist die zentrale Annahme, die ich zugrunde lege.

In der modernen Physik gibt es drei große Problemfelder:

- Zum einen hat sich „herausgestellt, dass die Quantentheorie alle Objekte und Wechselwirkungen im mikroskopischen Bereich (und darüber hinaus) äußerst erfolgreich beschreibt. Man ist deshalb geneigt, von der *Universalität* der Quantentheorie zu sprechen. Sie bildet einen theoretischen Rahmen, der buchstäblich alles zu beschreiben scheint – nur die Gravitation steht bisher abseits." [37, Kiefer, S. 79] Es muss in irgendeiner Weise möglich sein, diese beiden Theorien zu harmonisieren.

- Außerdem „bleibt die Interpretation der Quantenmechanik . . . erstaunlich dunkel. So lesen wir etwa bei Gell-Mann: 'Quantenmechanik, diese mysteriöse und verwirrende Theorie, die niemand von uns wirklich versteht, von der wir jedoch wissen, wie wir sie benutzen müssen.' [27, Gell-Mann] Sinngemäß gleichlautende Zitate finden sich . . . bei Bohr über Heisenberg bis Feynman." [48, Passon, S. 5] Es muss in irgendeiner Weise möglich sein, diese Theorie verständlicher zu formulieren.

- Zum anderen gilt die Quantenverschränkung, die Einstein eine „spukhafte Fernwirkung" [13, Einstein, S. 210] nannte, als nachgewiesen: „Eine Gruppe der Universität Genf um Nicolas Gisin [9, Gisin] [hat] der Geschwindigkeit der 'spukhaften Fernwirkung' eine extrem hohe 'untere Grenze' gesetzt: Die Gruppe konnte im Experiment zeigen, dass zwei verschränkte Photonen bezüglich verschiedener Eigenschaften, u. a. der Polarisation, mit wenigstens 10.000-facher Lichtgeschwindigkeit kommunizieren." [10, Gisin] Die Verschränkung von Quantenteilchen ist außerdem über eine Entfernung von über 100 km nachgewiesen. [37, Kiefer, S. 97] Es muss in irgendeiner Weise möglich sein, eine Überlichtgeschwindigkeit in die Physik zu integrieren.

Die ersten beiden Problemfelder sind seit über 90 Jahren bekannt, bislang aber ungelöst. Ich zeige in diesem Buch, dass eine Harmonisierung dieser beiden Theorien möglich ist – wenn man akzeptiert, dass sich die Gravitation mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreitet.

Ich werde dabei nach dem Prinzip „back to the roots" verfahren, d.h. ich werde mich auf die seit Galilei und Newton bewährten Grundprinzipien der Physik beziehen, die auch Einstein mit seinem Äquivalenzprinzip berücksichtigte. Unter anderem sind dies:

- Die Komponenten einer physikalischen Größe haben alle die gleiche physikalische Einheit.

- Impuls und Kraft sind zentrale Größen der Physik.

Von den Grundprinzipien der Physik sollte man nur abweichen, wenn ein Problem sonst nicht zu lösen ist.

Zur Lösung des ersten Problemfeldes muss man die Gravitation quantifizieren (Kap.2.1, S.23). Dazu muss man Quanten, die Gravitonen einführen, die etwa auf einen Planeten einwirken müssen. Wegen meiner Grundannahme gehe ich davon aus, dass es Gravitonen gibt, dass man also „nur" noch ihre Eigenschaften herausfinden muss; sie sind keine hypothetischen Teilchen.

Da ein Planet laufend in kürzesten Zeitabständen seine Bewegungsrichtung ändert, müssen die Gravitonen in kürzesten Zeitintervallen auf den Planeten einwirken. Somit ist man bei der Definition einer Kraft. Eine Kraft ist die Änderung des Impulses in der Zeit, auf eine Probemasse (Planet) muss also ein Impuls übertragen werden, wenn wir vom Wirken einer Kraft sprechen.

Es wird allerdings oft gesagt, dass es in der Allgemeinen Relativitätstheorie keine Gravitationskräfte mehr gibt [64, z.B.: Taylor und Wheeler, S. 3-4], sondern dass die Bewegung von Massenteilchen als Trägheitsbewegung auf geodätischen Linien im gekrümmten Raum zu beschreiben ist. Ich werde jedoch zeigen, dass man auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie mithilfe einer leicht modifizierten Schwarzschild-Metrik (Kap.2.3.2, S.38) sehr wohl Gravitationskräfte einführen, definieren und verwenden kann – ganz im Sinne von Einsteins Originalveröffentlichungen. Diese Kraft enthält – und das ist eine ganz neue Erkenntnis – eine zirkulierende Kraftkomponente.

In der Elektrodynamik, in der es ebenfalls zirkulierenden Kräfte gibt, ist $q \overset{\Longrightarrow}{A}$ ein Impuls, wobei q eine elektrische Probeladung und $\overset{\Longrightarrow}{A}$ das Viererpotenzial sind. Diesen Impuls nenne ich Feldimpuls des elektromagnetischen Feldes und zeige, dass für die Gravitation ein analoger Zusammenhang $m \overset{\Longrightarrow}{P}$ bestehen muss (Kap.3.1, S.73).

Mithilfe des Gesamtimpulses $\overset{\Longrightarrow}{\mathfrak{P}} = \left(i\frac{\mathfrak{E}}{c};\, \vec{\mathfrak{P}}\right) = m \overset{\Longrightarrow}{w} + m \overset{\Longrightarrow}{P} + q \overset{\Longrightarrow}{A}$ eines Teilchens kann man die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ *stringent herleiten* und die Wirkung als Wegintegral $S = \int_\Gamma \overset{\Longrightarrow}{\mathfrak{P}} \cdot \overset{\Longrightarrow}{dx}$ längs des Weges Γ definieren. Kurz: *Wirkung = Impuls * Weg*: $S = p \cdot s$ (Kap.3.2, S.80).

Ich weise nach, dass sich die Gravitation mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten muss, dass Gravitonen also Tachyonen sein müssen (Kap.4.2, S.94 und Kap.4.3, S.104). Mit der Definition eines vierdimensionalen Drehimpulses (Kap.4.3.3, S.106) kann ich zeigen, dass die Konstanz des Drehimpulses – die zur Begründung der Keplerschen Gesetze benötigt wird – nur bei einer überlichtschnellen Ausbreitung der Gravitation gelten kann. Das ist die Lösung des dritten Problemfeldes, wobei ich allerdings zur Verschränkung von Quanten keine präzisen Aussagen machen kann.

Eine wichtige Konsequenz dieser überlichtschnellen Ausbreitung der Gravitation ist, dass Gravitonen beim Emittieren bzw. beim Absorbieren die Ruhmasse des unterlichtschnellen Teilchens, etwa des Elektrons nicht ändern können (Kap.4.1.2, S.92). Da die Stärke des räumlichen Impulses eines Gravitons von der Geschwindigkeit des emittierenden Teilchens, etwa des Elektrons abhängt, bewirkt die Menge der Gravitonen, dass Elementarteilchen und Atome eine unregelmäßige Zitterbewegung ausüben, eine *ungedämpfte Brownsche Bewegung* (Kap.8.3, S.201). Makroskopisch folgen daraus die Trägheit eines Körpers (Kap.7.5, S.176) und als Konsequenz die Newtonschen Axiome.

Wenn man das Helmholtz-Theorem (Kap.3.3, S.83) auf die Gravitationskraft anwendet, dann ergibt sich, dass die Gravitationskraft eine Struktur mit Divergenz und Rotation haben muss ähnlich wie die elektromagnetische Kraft. Als Konsequenz zeige ich, dass man die Gravitationskraft mithilfe eines Gravi-Maxwellschen Gleichungssystems beschreiben kann, also auch mit einer Lorentz-Kraft (Kap.6.2, S.140). Analog zur lichtschnellen Elektrodynamik gibt es eine **überlichtschnelle Gravitodynamik** mit ganz ähnlichen Gesetzen.

Mit dem Kraftkonzept der Gravitation erhält man also in vielen Bereichen eine *Vereinfachung der Berechnungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie* verglichen mit der bisher üblichen Tensorrechnung.

Mit dieser *Lorentz-Kraft der Gravitation* kann ich zeigen, dass man sehr wahrscheinlich *keine Dunkle Materie* benötigt (Kap.6.4.2, S.161). Von einer Dunklen Materie hat man übrigens bisher auch keine Spur entdecken können, obwohl es sie auch in der Milchstraße geben müsste.

Eine weitere Konsequenz dieser überlichtschnellen Ausbreitung der Gravitation ist, dass man das Phänomen, das mit dem Schlagwort Dunkle Energie gekennzeichnet wird, mithilfe der überlichtschnellen Gravitonen erklären kann: Man braucht *keine Dunkle Energie* (Kap.7.7, S.178).

In der Quantenelektrodynamik (QED) werden Positronen als Elektronen interpretiert, die sich rückwärts in der Zeit bewegen, die daher eine negative Energie/Masse haben. Die atemberaubende Übereinstimmung von Theorie und Experiment bei der QED führen zu der Annahme, dass Antimaterie grundsätzlich als Materie, die sich rückwärts in der Zeit bewegt, interpretiert werden kann (Kap.7.1, S.163). Aus dem newtonschen Gravitationsgesetz folgt, dass Antimaterie von Materie abgestoßen werden muss, dass in unserem Teil des Universums praktisch keine Antimaterie vorhanden ist.

Wir Menschen als Beobachter interpretieren allerdings die Bewegung von Antimaterie als in unsere Zukunft gerichtet. Daher sehen wir das Anti-Elektron als Positron an, das von Elektronen angezogen wird. Ähnlich deuten wir das Verhalten von Materie und Antimaterie.

Bei einer lichtschnellen Ausbreitung einer Kraft – wie bei den Elektronen in einem Atom – rotiert der Drehimpuls. Daraus folgt, dass Atome, rein mechanisch aufgefasst, kugelförmig oder ellipsoidförmig sein müssen; ein Ergebnis, welches für die Quantenmechanik bedeutsam ist (Kap.4.3.3.2, S.110).

W. Weizel (1953) und E. Nelson (1965) haben nachgewiesen, dass man die Schrödinger-Gleichung für klassische Teilchen (Korpuskel) herleiten kann – wenn diese Teilchen ungedämpfte Brownsche Bewegungen ausführen, verursacht von hypothetischen lichtschnellen Zeronen (Weizel) oder von einem Äther (Nelson) (Kap.8.1.4, S.194). Da die Gravitonen eine Brownsche Bewegung von mikroskopischen Teilchen verursachen, sind sie die (allerdings überlichtschnellen) Zeronen Weizels bzw. bildet die Menge der Gravitonen den Äther Nelsons.

Mit dem Planckschen Gesetz $E = h \cdot \nu$ und der Wirkung $S = p \cdot s$ kann ich begründen, dass die Gravitonen als Bosonen beim Doppelspalt-Experiment eine überlichtschnelle Welle bilden, die wegen der Interferenz der Gravitationswellen gemäß dem Huygens'schen Prinzip die Bewegung von mikroskopischen Teilchen so beeinflussen, wie wir es in den Experimenten sehen. Die Gravitationswellen bilden also die *Führungswelle von de Broglie* (Kap.8.4, S.202).

Ich werde also in diesem Buch

- **verschiedene präzise Aspekte der Gravitationskraft angeben, die ich allerdings bisher nicht zu einer zusammenfassenden Theorie vereinigen kann,**

- **nachweisen, dass die Quanteneffekte der Quantenmechanik wesentlich mitbestimmt werden durch Gravitonen, den Quanten der Gravitation, die sich mit**

Überlichtgeschwindigkeit bewegen: Gravitonen sind Tachyonen; die Gesamtheit der Gravitonen bildet die Führungswelle de Broglie's.

Plakativ ausgedrückt:

Die Quantenmechanik ist ein Kind der Gravitation.

1.2 Bezeichnungen, Schreib- und Sprechweise

Mit „schweren" Teilchen bezeichne ich in diesem Buch alle Teilchen mit einer reellen Ruhmasse. Diese Teilchen werden von der Gravitation angezogen.
Vektoren werden grundsätzlich mit einem (Doppel-)Pfeil gekennzeichnet. Vierdimensionale Vektoren, d.h. Tensoren vom Rang 1 werden folgendermaßen geschrieben:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{a}} = a_\mu = (ia_o;\, \vec{a}) = (ia_o;\, a_1, a_2, a_3) = (ia_t;\, a_x, a_y, a_z)$$

mit $i^2 = -1$ und mit dem Betrag

$$a = \left|\overrightarrow{\overrightarrow{a}}\right| = \sqrt{\overrightarrow{\overrightarrow{a}}^2} = \sqrt{-a_0^2 + \vec{a}^2} = \sqrt{-a_t^2 + \vec{a}^2} = \sqrt{-a_t^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ist ein dreidimensionaler, räumlicher Vektor.
$\overrightarrow{\overrightarrow{r}} = (ict;\, x, y, z) = (ix_0;\, x_1, x_2, x_3)$ ist ein vierdimensionaler Ortsvektor.

Ich verwende wie am Beginn des vorherigen Jahrhunderts eine imaginäre Zeitkoordinate, da der metrische Tensor der Speziellen Relativitätstheorie bei dieser Schreibweise der Einheitstensor ist. Daher braucht hier nicht zwischen ko- und kontravarianten Vektoren unterschieden zu werden, da sie identisch sind. Die Verwendung von ko- bzw. kontravarianten Vektoren vernebelt meines Erachtens den Blick auf die an sich einfache, mathematische Struktur des Vektorraumes der speziellen Relativitätstheorie.

Der Vierergradient ist $\overrightarrow{\overrightarrow{\nabla}} = \left(\frac{\partial}{ic\partial t};\, \vec{\nabla}\right)$ mit $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ bzw. $\overrightarrow{\overrightarrow{\nabla}} = \left(\frac{\partial}{i\partial x_0};\, \vec{\nabla}\right)$ mit $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$.

Der d'Alembert-Operator ist $\overrightarrow{\overrightarrow{\nabla}}^2 = \vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} = \vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}$.

Als abkürzende Schreibweise verwende ich oftmals $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}$ oder $d_\tau \equiv \frac{d}{d\tau}$.

Eine Lorentz-Transformation $\Lambda_{\vec{v}}$ ist der Übergang von einem vierdimensionalen Bezugssystem zu einem zweiten Bezugssystem, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. Wenn diese Geschwindigkeit genau parallel zur x-Achse ist, d.h. wenn $\vec{v} = (v, 0, 0)$ ist, dann gilt

$$\overrightarrow{\overrightarrow{x}}' = \begin{pmatrix} ict' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda_v \overrightarrow{\overrightarrow{x}} = \begin{pmatrix} \gamma_v & -i\beta\gamma_v & 0 & 0 \\ i\beta\gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

bzw. $ct' = \gamma_v\,(ct - \beta x),\ x' = \gamma_v\,(x - \beta ct),\ y' = y,\ z' = z$ mit

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ und } \beta = \frac{v}{c}.$$

Stets wird der Lorentz-Faktor mit dem Buchstaben Gamma und einem Index gekennzeichnet, etwa $\gamma_w = 1/\sqrt{1 - w^2/c^2}$.

Für eine Masse M bezeichnet $\widehat{\Sigma}$ mit den Koordinaten $\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z}$ und $\hat{t}$ das Bezugssystem, in dem M im Ursprung ruht (Dach = Haus von M, in dem M ruht).

Die Gravitationskonstante bezeichne ich mit κ.

Griechische Indizes laufen von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3. Es wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet: Wenn in einer Gleichung zwei gleiche Indizes vorkommen, einer unten, der andere oben, dann soll über diesen Index summiert werden. D.h. $x_i = a_{i\alpha}b^\alpha + d_i \Longleftrightarrow x_i = a_{i0}b^0 + a_{i1}b^1 + a_{i2}b^2 + a_{i3}b^3 + a_{i4}b^4 + d_i$.

u, v und w sind stets Geschwindigkeiten, wobei immer $v < c$ und $w < c$, aber $u > c$ gelten soll. v ist stets die Geschwindigkeit des felderzeugenden Körpers oder des Bezugssystems und w ist stets die Geschwindigkeit der Probemasse.

Im gesamten Aufsatz soll $\dot{x}$ bzw. $\ddot{x}$ stets die Ableitung nach der Zeit t, nicht die Ableitung nach der Eigenzeit τ bedeuten. Für die Eigenzeit gilt $dt = \gamma d\tau$, also $dt > d\tau$ und es ist

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} \Longleftrightarrow \frac{1}{d\tau} = \gamma\frac{1}{dt}. \tag{1.2}$$

Ich verwende in diesem Buch das internationale Einheitensystem SI. $\odot$ ist das Symbol unserer Sonne.

F_N ist die newtonsche Gravitationskraft: $F_N = -\kappa mM/r^2$ bzw. $\overrightarrow{F_N} = -\frac{\kappa mM}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ bzw. $\overrightarrow{F_N} = -\frac{\kappa mM}{r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}$. $\overrightarrow{F_{Gr}}$ bezeichnet die Gravitationskraft der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Fast überall setze ich $c = 3 \cdot 10^5 km/s$ statt des exakten Wertes
$c = 2,997.924.58 \cdot 10^5\ km/s$ auf der Erde. So kann man fast alle Rechnungen schnell und mit einem vernachlässigbaren Fehler durchführen.

Da seit 1919 bekannt ist, dass Lichtstrahlen von der Sonne abgelenkt werden, muss die Lichtgeschwindigkeit von der Gravitation abhängen. c_0 bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit ohne Gravitationsfelder, etwa in einem Satellitenlabor. c_g bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit in einem Gravitationsfeld und c die Lichtgeschwindigkeit ohne nähere Angaben.

Das Argument, z.B. (x, y, z) einer Funktion f_t schreibe ich in Klammern als Index, also $f_{t(x,y,z)}$.

1.3 Mathematisch-physikalische Vorbemerkungen

Dieses Kap.1.3 kann bei der Lektüre zunächst übersprungen werden, da ich hier einige wichtige Formeln mathematisch begründe. Später verweise ich dann jeweils auf diesen Abschnitt.

1.3.1 Mathematische versus physikalische Gesetze

Nach all unseren Erfahrungen muss jede physikalische Theorie mit zugrunde liegenden Messungen begründet werden, wobei die Mathematik eine zentrale Rolle spielt. In der Physik müssen alle Aussagen mathematisch – d.h. als Gleichung – mathematisch konsistent formuliert sein. Wenn das nicht der Fall war, war das bisher stets ein Hinweis darauf, dass die jeweils vorliegende physikalische Theorie in irgendeiner Weise angepasst bzw. verändert werden musste.

Ich möchte darauf hinweisen, dass die Mathematik jedoch eine Geisteswissenschaft ist, keine Naturwissenschaft. So braucht die Mathematik zur Begründung der Infinitisimalrechnung die reellen Zahlen. Beispielsweise ist $\sqrt{2}$ eine reelle Zahl, deren Dezimaldarstellung unendlich lang *ohne* Periode ist.

Solche Zahlen gibt es in der Physik nicht. Alle Zahlen, die wir in der Physik verwenden, sind endliche Dezimalzahlen mit 20 oder vielleicht höchstens 30 Stellen. Wir benutzen in der Physik letztlich nur endliche Näherungen von mathematischen Größen bzw. mathematischen Gesetzen und müssen uns hüten, diese Näherungen mit mathematischen Gesetzen gleichzusetzen.

Jedes physikalische Gesetz ist eine Abstrahierung von Messungen, die prinzipiell stets nur eine endliche Anzahl von Dezimalstellen liefern können. Das physikalische Gesetz abstrahiert von den leicht unterschiedlichen Messwerten zu einer physikalischen Gesetzmäßigkeit. Diese Tatsache muss man immer im Hinterkopf behalten, wenn man eine physikalische Gesetzmäßigkeit formulieren will. Meines Erachtens wird dieser Zusammenhang sehr klar im Höhlengleichnis Platons dargestellt.

Als Beispiel kann man die Keplerschen Gesetze nehmen, die Kepler näherungsweise aus den – aus unserer Sicht höchst ungenauen – Beobachtungsdaten von Tycho Brahe folgerte und dann als physikalische Gesetzmäßigkeit postulierte. Ein weiteres Beispiel ist die Allgemeine Relativitätstheorie, die Einstein aus der – durch Messungen nahe gelegte, dann aber postulierte – Gleichheit von träger und schwerer Masse im Rückgriff auf die Riemannsche, mathematische Theorie des gekrümmten Raumes formulierte. Anscheinend hat Einstein damit einen Nerv des Universums getroffen.

1.3.1.1 Interpolation versus Extrapolation und Intrapolation

Eine Interpolation ist eine Bestimmung von weiteren Werten *zwischen* zwei Ausgangswerten. Die Genauigkeit dieser weiteren Werte ist in etwa vergleichbar mit der Genauigkeit der Ausgangswerte.

Bei einer Extrapolation, bei der man von 'normalen' Werten auf sehr große Werte zu schließen versucht, gilt dies aber nur *sehr* eingeschränkt, wenn überhaupt. In der Allgemeinen Relativitätstheorie haben wir es verstärkt mit Extrapolationen zu tun, sodass man deutlich mit größeren Ungenauigkeiten rechnen muss.

Das gleiche gilt für Intrapolationen, bei denen man von 'normalen' Werten auf sehr kleine Werte zu schließen versucht.

1.3.1.2 Lokale Konstanten

Eine lokale Konstante ist eine Größe, die in der (mathematischen) Umgebung eines Raumpunktes praktisch konstant ist, deren Änderungen in dieser Umgebung vernachlässigbar sind. In der Astronomie kann diese Umgebung auch relativ groß sein. Von den leicht unterschiedlichen Werten wird zu einer lokalen Konstanten abstrahiert (vergl. S.134: Vorgehensweise von Feynman bei der Berechnung des Liénard-Wiechert-Potenzials).

Eine lokale Konstante ist also eine Größe, die beim Ableiten in der Differenzialrechnung als Konstante behandelt werden kann, nicht jedoch bei der Integration. Dort hängt es von der räumlichen Ausdehnung des Integrations-Intervalls ab, ob diese Größe als Konstante oder als Variable behandelt werden muss. Die Stärke des Potenzials

$$\frac{2\,|\Phi_g|}{c^2} = \frac{2\kappa M}{rc^2} = \frac{2a}{r}$$

an einer Stelle $\overrightarrow{\overrightarrow{r}}$ außerhalb einer Massenverteilung ist beispielsweise oft eine lokale Konstante. (vergl. [24, Fließbach, S. 56, 57, 136][1])

1.3.2 Kreuzprodukt und Rotation in vier Dimensionen

Die Spezielle Relativitätstheorie ist in zigtausenden, wenn nicht hunderttausenden Experimenten bestätigt worden und kann insofern als Basistheorie verwendet werden. Das bewährte Vektorprodukt der newtonschen, dreidimensionalen Physik muss also für den vierdimensionalen Raum der Speziellen Relativitätstheorie verallgemeinert werden.

Dabei ist zu beachten, dass man im Dreidimensionalen mit dem Vektorprodukt einerseits einen orthogonalen Vektor zu zwei gegebenen Vektoren bestimmen kann und andererseits als Rotation zirkulierende Vektorfelder beschreiben kann. Im Vierdimensionalen werde ich dazu zwei unterschiedliche Größen einführen müssen, die jeweils nur einen der beiden Aspekte des dreidimensionalen Vektorprodukts erfüllen können.

1.3.2.1 Ortsvektoren im Minkowski-Raum

Auch im Minkowski-Raum muss man einen Koordinatenursprung $O = (0i;\, 0, 0, 0)$ festlegen. Dieser Koordinatenursprung bleibt bei jeder Lorentz-Transformation Λ_v erhalten: $\Lambda_v\,(i0;\, 0, 0, 0) = (i0;\, 0, 0, 0)$. Da bei einer Lorentz-Transformation ebenfalls der Betrag eines Vektors erhalten bleibt, kann man wie im Dreidimensionalen auch im Minkowski-Raum von Ortsvektoren $\overrightarrow{\overrightarrow{r}} = (ict;\, \vec{r})$ sprechen, die vom Koordinatenursprung zu einem Raum-Zeit-Punkt führen und bei einer Lorentz-Transformation erhalten bleiben.

[1] Zur allgemeinen Relativitätstheorie zitiere ich meistens aus dem Lehrbuch von T. Fließbach. In diesem Buch hat er [24, S. V] „einen ähnlichen physikalischen Zugang und weitgehend den gleichen mathematischen Formalismus gewählt wie Steven Weinberg in seinem Buch 'Gravitation and Cosmology'". Er verweist weiterhin auf die Lehrbücher von Sexl und Urbantke ('Gravitation und Kosmologie'), Misner, Thorne und Wheeler [41], W.Rindler ('Essential Relativity'), H.Stephani ('Allgemeine Relativitätstheorie') und I.R.Kenyon ('General Relativity'). Meines Erachtens gibt also das Lehrbuch von Fließbach die herrschende Auffassung zur Allgemeinen Relativitätstheorie wieder.

1.3.2.2 Linear unabhängige Vektoren in der (Speziellen) Relativitätstheorie

Die Umgebung von jedem Weltpunkt kann nach dem Äquivalenzprinzip Einsteins beliebig genau durch ein Koordinatensystem der Speziellen Relativitätstheorie angenähert werden. Es reicht aus, mit einer Rakete an diesen Weltpunkt zu kommen und dann die Raketenmotoren auszuschalten. In dieser Umgebung kann also die Raumzeit mathematisch als vierdimensionaler Vektorraum beschrieben werden.

Dass drei raumartige Vektoren und ein zeitartiger Vektor zusammen linear unabhängig sein können, braucht wohl nicht weiter begründet zu werden. Ich zeige jetzt, dass unter den vier linear unabhängigen Vektoren auch lichtartige Vektoren sein können.

Dass vier Vektoren linear unabhängig sind, zeigt man am bequemsten, indem man die Determinante berechnet, die aus diesen vier Vektoren als *Zeilenvektoren* gebildet wird. Ich nehme jetzt sogar drei lichtartige Vektoren und einen weiteren raumartigen oder zeitartigen Vektor und bilde die zugehörigen Determinanten und entwickle die Determinanten jeweils nach der letzten, der 4. Spalte:

$$\begin{vmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \\ i & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \\ i & 2 & 0 \end{vmatrix} = -(i - 2i) \neq 0, \quad \begin{vmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -i \neq 0. \tag{1.3}$$

Man kann also sogar drei lichtartige Vektoren mit einem raumartigen oder mit einem zeitartigen Vektor kombinieren, sodass diese vier Vektoren linear unabhängig sind. Das gilt natürlich auch für nur zwei oder nur einem lichtartigen Vektor.

Als letztes Beispiel zeige ich, dass man sogar vier linear unabhängige lichtartige Vektoren finden kann (Entwicklung nach der letzten, der 4. Spalte):

$$\begin{vmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \\ 5i & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \\ 5i & 3 & 4 \end{vmatrix} = -(5i - 3i - 4i) = 2i \neq 0. \tag{1.4}$$

Im Vektorraum des Minkowski-Raumes gibt es also Basen, die nur aus lichtartigen Vektoren bestehen, z.B. $\overrightarrow{a_0} = (i; 1, 0, 0)$, $\overrightarrow{a_1} = (i; 0, 1, 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (i; 0, 0, 1)$ und $\overrightarrow{a_3} = (5i; 3, 4, 0)$. Damit lassen sich eventuell Rechenvereinfachungen bei Berechnungen der Elektrodynamik finden, die bekanntermaßen in der Quantenelektrodynamik (QED) besonders aufwendig sind.

Eine offensichtliche Basis des Minkowskiraumes ist $\overrightarrow{e_0} = (i; 0, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_x} = (0; 1, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_y} = (0; 0, 1, 0)$ und $\overrightarrow{e_z} = (0; 0, 0, 1)$. Diese Basis kann beispielsweise durch die vier lichtartigen Vektoren von oben ausgedrückt werden:

$$\overrightarrow{e_0} = (i; 0, 0, 0) = \frac{3}{2}(i; 1, 0, 0) + 2(i; 0, 1, 0) + 0(i; 0, 0, 1) - \frac{1}{2}(5i; 3, 4, 0),$$

$$\overrightarrow{e_x} = (0; 1, 0, 0) = -\frac{1}{2}(i; 1, 0, 0) - 2(i; 0, 1, 0) + 0(i; 0, 0, 1) + \frac{1}{2}(5i; 3, 4, 0),$$

$$\overrightarrow{e_y} = (0; 0, 1, 0) = -\frac{3}{2}(i; 1, 0, 0) - 1(i; 0, 1, 0) + 0(i; 0, 0, 1) + \frac{1}{2}(5i; 3, 4, 0),$$

$$\overrightarrow{e_z} = (0;0,0,1) = -\frac{3}{2}\,(i;1,0,0) - 2\,(i;0,1,0) + 1\,(i;0,0,1) + \frac{1}{2}\,(5i;3,4,0)\,,$$

womit nachgewiesen ist, dass auch die vier lichtartigen Vektoren $\overrightarrow{a_0}$, $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ und $\overrightarrow{a_3}$ von oben eine Basis des Minkowskiraumes bilden.

1.3.2.3 Ein vierdimensionales Kreuzprodukt

Im Vierdimensionalen können Gradient und Divergenz wie im Dreidimensionalen definiert werden, nur das Kreuzprodukt bzw. die Rotation machen Schwierigkeiten.

Daher definiere ich zunächst ein relativistisches Kreuzprodukt.

Im Dreidimensionalen kann man das Kreuzprodukt mithilfe einer Determinanten definieren. Dieses verallgemeinere ich auf vierdimensionale Determinanten, die dann allerdings nach den Elementen der ersten, der obersten Zeile in eine Summe von dreidimensionalen Determinanten entwickelt werden müssen.

Eine Komplikation entsteht dadurch, dass diese Rechenoperation im Minkowski-Raum stattfindet, dass insofern bei meiner Schreibweise die imaginäre Einheit i verwendet werden muss. Aus Gl.(1.3) bzw. Gl.(1.4) ergibt sich, dass eine solche Determinante stets imaginär ist. Da ein Kreuzprodukt aber einen Vektor im Minkowski-Raum liefern soll, muss diese Determinante für das Kreuzprodukt noch mit der imaginären Einheit i multipliziert werden.

Zusätzlich muss die Vorzeichenregel des Entwicklungssatzes berücksichtigt werden, dass nämlich die Unterdeterminante, die zu dem Glied $a_{\mu\nu}$ der Matrix $\mathfrak{A} = (a_{\mu\nu})$ gehört, mit dem Vorzeichenfaktor $(-1)^{\mu+\nu}$ multipliziert werden muss.

Zur Überprüfung, ob diese Definition sinnvoll ist, wende ich sie zuerst zunächst auf Einheitsvektoren in Richtung der kartesischen Basisvektoren an:

$$\overrightarrow{e_t} \times \overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y} = i \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_t} & \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i\,\overrightarrow{e_z} \begin{vmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{e_z}\,,$$

$$\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y} \times \overrightarrow{e_z} = i \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_t} & \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i\,\overrightarrow{e_t} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i\,\overrightarrow{e_t}\,,$$

$$\overrightarrow{e_y} \times \overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_t} = i \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_t} & \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -i\,\overrightarrow{e_x} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{e_x}\,,$$

$$\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_t} \times \overrightarrow{e_x} = i \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_t} & \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = i\,\overrightarrow{e_y} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\,\overrightarrow{e_y}\,.$$

Da eine Determinante gleich null ist, wenn zwei Zeilenvektoren linear abhängig sind, ist es die primäre Aufgabe des Kreuzproduktes, hier zu drei linear unabhängigen Zeilenvektoren einen vierten linear unabhängigen Zeilenvektor zu berechnen. Etwas irritierend ist das Vorzeichen im 4. Fall, das scheint jedoch eine Konsquenz des Minkowski-Raumes zu sein.

Für die drei Vektoren

$$\overrightarrow{\overrightarrow{a}} = (ia_0; a_1, a_2, a_3)\,, \ \overrightarrow{\overrightarrow{b}} = (ib_0; b_1, b_2, b_3) \text{ und } \overrightarrow{\overrightarrow{c}} = (ic_0; c_1, c_2, c_3) \tag{1.5}$$

ergibt sich also

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overrightarrow{a}} \times \overrightarrow{\overrightarrow{b}} \times \overrightarrow{\overrightarrow{c}} = i \begin{vmatrix} \vec{e}_t & \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ ia_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ ib_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ ic_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= i \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{e}_t - i \begin{vmatrix} ia_0 & a_2 & a_3 \\ ib_0 & b_2 & b_3 \\ ic_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{e}_x + \\ = \qquad & +i \begin{vmatrix} ia_0 & a_1 & a_3 \\ ib_0 & b_1 & b_3 \\ ic_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} \vec{e}_y - i \begin{vmatrix} ia_0 & a_1 & a_2 \\ ib_0 & b_1 & b_2 \\ ic_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \vec{e}_z .\end{aligned} \tag{1.6}$$

Aus

$$\overrightarrow{\overrightarrow{a}} \cdot \left(\overrightarrow{\overrightarrow{a}} \times \overrightarrow{\overrightarrow{b}} \times \overrightarrow{\overrightarrow{c}} \right) = i \begin{vmatrix} ia_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ ia_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ ib_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ ic_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

folgt, dass der Vektor $\overrightarrow{\overrightarrow{a}} \times \overrightarrow{\overrightarrow{b}} \times \overrightarrow{\overrightarrow{c}}$ linear unabhängig von den drei Ausgangsvektoren $\overrightarrow{\overrightarrow{a}}$ bzw. $\overrightarrow{\overrightarrow{b}}$ bzw. $\overrightarrow{\overrightarrow{c}}$ ist.

Mit anderen Worten: Wenn man mit drei beliebigen Vektoren das vierdimensionale Kreuzprodukt berechnet und wenn das Ergebnis ein Vektor ungleich des Nullvektors $(0i; 0, 0, 0)$ ist, dann sind diese vier Vektoren linear unabhängig, könnten also als Basis des Minkowski-Raumes verwendet werden.

Dieses vierdimensionale Kreuzprodukt werde ich für den Drehimpuls im vierdimensionalen Raum verwenden.

1.3.2.4 Eine vierdimensionale Rotation

Die Gesetze der Elektrodynamik werden mit den Maxwellschen Gleichungen (1861-64) zusammengefasst, die auch in der speziellen Relativitätstheorie (1905) bis auf geringfügige Anpassungen ihre Gültigkeit behalten.

In der vierdimensionalen Formulierung der Elektrodynamik im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie wird das Vierer-Potenzial $\overrightarrow{\overrightarrow{A}} = \left(i\Phi_e/c; \vec{A}\right) = (iA_0; A_1, A_2, A_3)$ verwendet [19, Feynman, Vol. II, S. 21-5, 21-13, 26-1 f] [46, Nolting, S. 64], wobei für die Feldstärken

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} A_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} A_2, \frac{\partial}{\partial x_3} A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} A_3, \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 \right)$$

$$\frac{\vec{E}}{c} = -\vec{\nabla} A_0 - \frac{\partial}{\partial x_0} \vec{A} = -\vec{\nabla} \frac{\Phi_e}{c} - \frac{\partial}{c \partial t} \vec{A} \Leftrightarrow \frac{E_j}{c} = \frac{\partial A_j}{i \partial x_0} - \frac{\partial i A_0}{\partial x_j} \tag{1.7}$$

gilt und $\overset{\Longrightarrow}{\nabla} = \left(\frac{\partial}{ic\partial t}; \vec{\nabla} \right) = \left(\frac{\partial}{ic\partial t}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{i\partial x_0}; \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ ist. (Achtung: i ist die imaginäre Einheit und j ist ein Index, der für x oder y oder z bzw. für 1 oder 2 oder 3 steht.)

Die Lorentz-Kraft ist dann

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{el}} &= q\gamma_w \vec{E} + q\gamma_w \vec{w} \times \vec{B} = q\gamma_w \left(-\vec{\nabla}\Phi_e - \dot{\vec{A}} \right) + q\gamma_w \vec{w} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \\ &= -q\gamma_w \vec{\nabla}\Phi_e - q\gamma_w \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \times \vec{w} - q\gamma_w \dot{\vec{A}} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Mit der abkürzenden Schreibweise $A_{\mu,\nu} := \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu$erhält man den Feldstärke-Tensor

$$F_e^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & A_{1,0} - A_{0,1} & A_{2,0} - A_{0,2} & A_{3,0} - A_{0,3} \\ A_{0,1} - A_{1,0} & 0 & A_{2,1} - A_{1,2} & A_{3,1} - A_{1,3} \\ A_{0,2} - A_{2,0} & A_{1,2} - A_{2,1} & 0 & A_{3,2} - A_{2,3} \\ A_{0,3} - A_{3,0} & A_{1,3} - A_{3,1} & A_{2,3} - A_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Wegen Gl.(1.7) folgt

$$F_e^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{1}{c}E_1 & i\frac{1}{c}E_2 & i\frac{1}{c}E_3 \\ -i\frac{1}{c}E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -i\frac{1}{c}E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -i\frac{1}{c}E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Hierin soll beispielsweise

$$A_{2,1} - A_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 = B_3 \text{ bzw. } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1.11}$$

bedeuten.

Man kann somit den elektromagnetischen Feldstärke-Tensor „als vierdimensionale Verallgemeinerung der Rotation des Vektors $\overset{\Longrightarrow}{A}$ auffassen" [46, Nolting, S. 66], also

$$F_e^{\mu\nu} = \overset{\Longrightarrow}{\nabla} \times \overset{\Longrightarrow}{A}.$$

Das führt zur Definition der Rotation der beiden Vektoren $\overset{\Longrightarrow}{a} = (ia_0; a_1, a_2, a_3)$ und $\overset{\Longrightarrow}{b} = (ib_0; b_1, b_2, b_3)$:

$$\overset{\Longrightarrow}{a} \times \overset{\Longrightarrow}{b} := (a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & ia_0b_1 - a_1ib_0 & ia_0b_2 - a_2ib_0 & ia_0b_3 - a_3ib_0 \\ a_1ib_0 - ia_0b_1 & 0 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_2ib_0 - ia_0b_2 & a_2b_1 - a_1b_2 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3ib_0 - ia_0b_3 & a_3b_1 - a_1b_3 & a_3b_2 - a_2b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt für $\overset{\Longrightarrow}{c} = (ic_0; c_1, c_2, c_3)$

$$\left(\overset{\Longrightarrow}{a} \times \overset{\Longrightarrow}{b}\right) \cdot \overset{\Longrightarrow}{c} = \begin{pmatrix} i\left(\langle a_0b_1 - a_1b_0\rangle c_1 + \langle a_0b_2 - a_2b_0\rangle c_2 + \langle a_0b_3 - a_3b_0\rangle c_3\right) \\ -\langle a_1b_0 - a_0b_1\rangle c_0 + \langle a_1b_2 - a_2b_1\rangle c_2 + \langle a_1b_3 - a_3b_1\rangle c_3 \\ -\langle a_2b_0 - a_0b_2\rangle c_0 + \langle a_2b_1 - a_1b_2\rangle c_1 + \langle a_2b_3 - a_3b_2\rangle c_3 \\ -\langle a_3b_0 - a_0b_3\rangle c_0 + \langle a_3b_1 - a_1b_3\rangle c_1 + \langle a_3b_2 - a_2b_3\rangle c_2 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Vergleicht man Gl.(1.12) mit Gl.(1.6), dann stellt man fest, dass

$$\left(\overset{\Longrightarrow}{a} \times \overset{\Longrightarrow}{b}\right) \cdot \overset{\Longrightarrow}{c} \neq \overset{\Longrightarrow}{a} \times \overset{\Longrightarrow}{b} \times \overset{\Longrightarrow}{c}$$

ist. Die vierdimensionale Rotation muss also deutlich von dem vierdimensionalen Kreuzprodukt unterschieden werden.

1.3.3 Lorentztransformation eines Tensors 2. Grades in der Speziellen Relativitätstheorie

Für den elektromagnetischen Feldtensor $F_e^{\mu\nu}$ von Gl.(1.10) und der elektromagnetischen Kraft $\overset{\Longrightarrow}{F_e}$ gilt folgender Zusammenhang

$$\overset{\Longrightarrow}{F_e} = qF_e^{\mu\nu}\overset{\Longrightarrow}{w} = q\begin{pmatrix} 0 & i\frac{1}{c}E_x & i\frac{1}{c}E_y & i\frac{1}{c}E_z \\ -i\frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -i\frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -i\frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}\gamma_w\begin{pmatrix} ic \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

wobei $\overset{\Longrightarrow}{w}$ die Geschwindigkeit der elektrischen Probeladung q bedeuten soll. [46, Nolting, S. 79]

Wenn man dieses Tensorprodukt ausführt, dann ergibt sich

$$\overset{\Longrightarrow}{F_e} = q\left(i\frac{\vec{E}\cdot\vec{w}}{c}; \vec{E} + \vec{w} \times \vec{B}\right). \tag{1.14}$$

Wegen $\vec{w}\cdot\vec{w}\times\vec{B} = 0$ ist das eine Minkowski-Kraft und der räumliche Teil ist die Lorentz-Kraft.

Jetzt betrachte ich das Ganze aus einem Bezugssystem $\sum'$, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (v, 0, 0)$ längs der x-Achse bewegen soll. Mit der Lorentz-Transformation Λ_v

von Gl.(1.1) (S. 13) ergibt sich

$$\overset{\Longrightarrow}{F_e}{}' = \Lambda_v \overset{\Longrightarrow}{F_e} \quad \text{und} \quad \overset{\Longrightarrow}{w}{}' = \Lambda_v \overset{\Longrightarrow}{w}$$

bzw.

$$\overset{\Longrightarrow}{F_e} = \Lambda_v^{-1} \overset{\Longrightarrow}{F_e}{}' \quad \text{und} \quad \overset{\Longrightarrow}{w} = \Lambda_v^{-1} \overset{\Longrightarrow}{w}{}'. \tag{1.15}$$

Wenn ich nun Gl.(1.13) in Gl.(1.15) einsetze, dann erhalte ich

$$\Lambda_v^{-1} \overset{\Longrightarrow}{F_e}{}' = q F_e^{\mu\nu} \overset{\Longrightarrow}{w} = q F_e^{\mu\nu} \Lambda_v^{-1} \overset{\Longrightarrow}{w}{}' \quad \text{bzw.} \quad \overset{\Longrightarrow}{F_e}{}' = q \Lambda_v F_e^{\mu\nu} \Lambda_v^{-1} \overset{\Longrightarrow}{w}{}'.$$

Es folgt somit

$$(F_e^{\mu\nu})' = \Lambda_v F_e^{\mu\nu} \Lambda_v^{-1} \tag{1.16}$$

Daraus ist ersichtlich, dass bei meiner Schreibweise mit einer imaginären Zeit/Energie-Komponente ein Tensor zweiten Grades wie eine Matrix behandelt und transformiert werden kann. Das ist eine Rechenerleichterung.

Das wende ich jetzt auf einen beliebigen Tensor $\overset{\Leftrightarrow}{P}$ 2. Grades an und berechne dessen Lorentz-Transformation:

$$\overset{\Leftrightarrow}{P}{}' = \begin{pmatrix} \gamma_v & -i\gamma_v\beta & 0 & 0 \\ i\gamma_v\beta & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{tt} & ip_{tx} & ip_{ty} & ip_{tz} \\ ip_{xt} & p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ ip_{yt} & p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ ip_{zt} & p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v & i\gamma_v\beta & 0 & 0 \\ -i\gamma_v\beta & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_v (p_{tt} + p_{xt}) & i\gamma_v (p_{tx} - \beta p_{xx}) & i\gamma_v (p_{ty} - \beta p_{xy}) & i\gamma_v (p_{tz} - \beta p_{xz}) \\ i\gamma_v (\beta p_{tt} + p_{xt}) & \gamma_v (-\beta p_{tx} + p_{xx}) & \gamma_v (-\beta p_{ty} + p_{xy}) & \gamma_v (-\beta p_{tz} + p_{xz}) \\ ip_{yt} & p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ ip_{zt} & p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \Lambda_v^{-1}.$$

Also ist

$$\overset{\Leftrightarrow}{P}{}' = \begin{pmatrix} \gamma_v^2 [(p_{tt} + p_{xt}) + \beta (p_{tx} - \beta p_{xx})] & i\gamma_v^2 [\beta (p_{tt} + p_{xt}) + (p_{tx} - \beta p_{xx})] & \cdot & \cdot \\ i\gamma_v^2 [(\beta p_{tt} + p_{xt}) - \beta (-\beta p_{tx} + p_{xx})] & \gamma_v^2 [-\beta (\beta p_{tt} + p_{xt}) + (-\beta p_{tx} + p_{xx})] & \cdot & \cdot \\ i\gamma_v (p_{yt} - \beta p_{yx}) & \gamma_v (-\beta p_{yt+} p_{yx}) & \cdot & \cdot \\ i\gamma_v (p_{zt} - \beta p_{zx}) & \gamma_v (-\beta p_{zt} + p_{zx}) & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \tag{1.17}$$

$$+ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & i\gamma_v (p_{ty} - \beta p_{xy}) & i\gamma_v (p_{tz} - \beta p_{xz}) \\ \cdot & \cdot & \gamma_v (-\beta p_{ty} + p_{xy}) & \gamma_v (-\beta p_{tz} + p_{xz}) \\ \cdot & \cdot & p_{yy} & p_{yz} \\ \cdot & \cdot & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_{tt} & ip'_{tx} & ip'_{ty} & ip'_{tz} \\ ip'_{xt} & p'_{xx} & p'_{xy} & p'_{xz} \\ ip'_{yt} & p'_{yx} & p'_{yy} & p'_{yz} \\ ip'_{zt} & p'_{zx} & p'_{zy} & p'_{zz} \end{pmatrix}.$$

Die Energie-Komponente $\overset{\Leftrightarrow}{P}_{00}$ des Tensors $\overset{\Leftrightarrow}{P}$ 2. Grades wird also nach einer Lorentz-Transformation mit dem *Quadrat* des Lorentz-Faktors multipliziert.