

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	IX
Chapitre VIII. Modules et anneaux semi-simples	1
1. Modules artiniens et modules noethériens	1
1. Modules artiniens et modules noethériens.....	1
2. Anneaux artiniens et anneaux noethériens.....	4
3. Contremodule.....	8
4. Polynômes à coefficients dans un anneau noethérien.....	9
Exercices.....	13
2. Structure des modules de longueur finie	23
1. Anneaux locaux.....	23
2. Décomposition de Weyr-Fitting.....	25
3. Modules indécomposables et modules primordiaux.....	27
4. Modules semi-primordiaux.....	29
5. Structure des modules de longueur finie.....	34
Exercices.....	36
3. Modules simples	41
1. Modules simples.....	41
2. Le lemme de Schur.....	43
3. Sous-modules maximaux.....	44
4. Modules simples sur un anneau artinien.....	46
5. Classes de modules simples.....	47
Exercices.....	48

4. Modules semi-simples	51
1. Modules semi-simples	51
2. L'homomorphisme $\bigoplus_i \text{Hom}_A(M, N_i) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, \bigoplus_i N_i)$	53
3. Quelques opérations sur les modules	53
4. Modules isotypiques	57
5. Description d'un module isotypique	58
6. Composants isotypiques d'un module	61
7. Description d'un module semi-simple	65
8. Multiplicités et longueurs dans les modules semi-simples	67
Exercices	70
5. Commutation	73
1. Commutant et bicommutant d'un module	73
2. Modules générateurs	75
3. Bicommutant d'un module générateur	78
4. Contremodule d'un module semi-simple	80
5. Théorème de densité	83
6. Application à la théorie des corps	84
Exercices	86
6. Équivalence de Morita des modules et des algèbres	91
1. Commutant et dualité	91
2. Modules générateurs et modules projectifs de type fini	94
3. Bimodules inversibles et équivalence de Morita	96
4. Correspondance de Morita des modules	99
5. Ensembles ordonnés de sous-modules	102
6. Autres propriétés préservées par la correspondance de Morita	105
7. Équivalence de Morita des algèbres	107
Exercices	111
7. Anneaux simples	115
1. Anneaux simples	115
2. Modules sur un anneau simple	118
3. Degrés	120
4. Idéaux des anneaux simples	122
Exercices	124

8. Anneaux semi-simples	131
1. Anneaux semi-simples.....	131
2. Modules sur un anneau semi-simple.....	134
3. Facteurs d'un anneau semi-simple.....	136
4. Idempotents et anneaux semi-simples.....	140
Exercices.....	144
9. Radical	147
1. Radical d'un module.....	147
2. Radical d'un anneau.....	150
3. Lemme de Nakayama.....	154
4. Relèvements d'idempotents.....	155
5. Couverture projective d'un module.....	156
Exercices.....	161
10. Modules sur un anneau artinien	169
1. Radical d'un anneau artinien.....	169
2. Modules sur un anneau artinien.....	170
3. Modules projectifs sur un anneau artinien.....	171
Exercices.....	174
11. Groupes de Grothendieck	179
1. Fonctions additives de modules.....	179
2. Groupe de Grothendieck d'un ensemble additif de modules.....	182
3. Utilisation des suites de composition.....	185
4. Le groupe de Grothendieck $R(A)$	186
5. Changement d'anneaux.....	189
6. Le groupe de Grothendieck $R_K(A)$	189
7. Structure multiplicative dans $K(\mathcal{C})$	191
8. Le groupe de Grothendieck $K_0(A)$	195
9. Le groupe de Grothendieck $K_0(A)$ d'un anneau artinien.....	196
10. Changement d'anneau pour $K_0(A)$	197
11. Réciprocité de Frobenius.....	197
12. Cas des anneaux simples.....	199
Exercices.....	202

12. Produit tensoriel de modules semi-simples	207
1. Modules semi-simples sur un produit tensoriel d'algèbres.....	207
2. Produit tensoriel de modules simples.....	209
3. Produit tensoriel d'algèbres commutatives semi-simples.....	211
4. Radical d'un produit tensoriel d'algèbres.....	213
5. Produit tensoriel de modules semi-simples.....	214
6. Produit tensoriel d'algèbres semi-simples.....	217
7. Extension des scalaires dans les modules semi-simples.....	217
Exercices.....	221
13. Algèbres absolument semi-simples	225
1. Modules absolument semi-simples.....	225
2. Algèbres sur un corps séparablement clos.....	226
3. Algèbres absolument semi-simples.....	227
4. Caractérisation des modules absolument semi-simples.....	231
5. Dérivations des algèbres semi-simples.....	232
6. Cohomologie des algèbres.....	234
7. Cohomologie des algèbres absolument semi-simples.....	236
8. Scindage des algèbres artiniennes.....	238
Exercices.....	242
14. Algèbres centrales et simples	247
1. Algèbres centrales et simples.....	247
2. Deux lemmes sur les bimodules.....	250
3. Théorèmes de conjugaison.....	252
4. Automorphismes des algèbres semi-simples.....	254
5. Sous-algèbres simples des algèbres simples.....	255
6. Sous-algèbres commutatives maximales.....	257
7. Sous-algèbres étales maximales.....	260
8. Sous-algèbres diagonalisables des algèbres simples.....	262
Exercices.....	265
15. Groupes de Brauer	273
1. Classes d'algèbres.....	273
2. Définition du groupe de Brauer.....	274
3. Changement de corps.....	276
4. Exemples de groupes de Brauer.....	279
Exercices.....	280

16. Autres descriptions du groupe de Brauer.....	281
1. τ -extensions de groupes.....	281
2. Image inverse d'une τ -extension.....	283
3. Image directe d'une τ -extension.....	285
4. Loi de groupe sur les classes de τ -extensions.....	289
5. Description cohomologique.....	291
6. Restriction et corestriction.....	294
7. Algèbres galoisiennes.....	300
8. Opérations sur les algèbres galoisiennes.....	307
9. Produits croisés.....	309
10. Application au groupe de Brauer.....	312
11. Indice et exposant.....	317
Exercices.....	319
17. Normes et traces réduites.....	329
1. Compléments sur les polynômes caractéristiques.....	329
2. Normes et traces réduites.....	332
3. Propriétés des normes et traces réduites.....	335
4. La norme réduite est une fonction polynomiale.....	338
5. Transitivité des normes et traces réduites.....	340
6. Normes réduites et déterminants.....	342
Exercices.....	344
18. Algèbres simples sur un corps fini.....	347
1. Polynômes sur un corps fini.....	347
2. Algèbres simples sur un corps fini.....	348
Exercices.....	351
19. Algèbres de quaternions.....	353
1. Propriétés générales des algèbres de quaternions.....	353
2. Centre des algèbres de quaternions.....	355
3. Simplicité des algèbres de quaternions.....	355
4. Critères pour qu'une algèbre de quaternions soit un corps.....	357
5. Algèbres sur un corps ordonné maximal.....	359
Exercices.....	361

20. Représentations linéaires des algèbres	365
1. Représentations linéaires des algèbres	365
2. Dual restreint d'une algèbre	367
3. Coefficients d'un module	368
4. Dual restreint et coefficients matriciels	371
5. Dual d'une algèbre semi-simple	371
6. Caractère d'une représentation	374
7. Coefficients d'un ensemble de classes de modules	379
8. Structure de cogèbre sur le dual restreint	380
Exercices	385
21. Représentations linéaires des groupes finis	387
1. Représentations linéaires	387
2. Le théorème de Maschke	391
3. Représentations induites et coinduites	392
4. Représentations et groupe de Grothendieck	394
5. Formule d'inversion de Fourier	396
6. Relations d'orthogonalité de Schur	399
7. Relation d'orthogonalité des caractères	400
8. Fonctions centrales sur un groupe fini	401
9. Cas des groupes commutatifs	404
10. Caractères et groupes de Grothendieck	405
11. Dimension des représentations simples	405
12. Changement de corps de base	406
13. Représentations linéaires complexes	411
Exercices	414
Appendice 1. Algèbres sans élément unité	425
1. Idéaux réguliers	425
2. Adjonction d'un élément unité	427
3. Radical d'une algèbre	429
4. Théorème de densité	431
Exercices	433
Appendice 2. Déterminants sur un corps non commutatif	437
1. Une généralisation des formes multilinéaires alternées	437
2. Un théorème d'unicité	438
3. Déterminant d'un automorphisme	441

4. Déterminant d'une matrice carrée.....	442
5. Le groupe unimodulaire.....	445
Exercices.....	448
Appendice 3. Le théorème des zéros de Hilbert.....	451
Appendice 4. Trace d'un endomorphisme de rang fini.....	453
1. Applications linéaires de rang fini.....	453
2. Trace d'un endomorphisme de rang fini.....	454
Exercices.....	457
Note Historique.....	459
Bibliographie.....	467
Index des notations.....	473
Index terminologique.....	475