

Inhaltsverzeichnis

Teil I Einführung und Grundlagen

1	Modellierung mit Partiellen Differentialgleichungen	3
2	Erste Eigenschaften von Lösungen	11
2.1	Notation und partielle Integration	11
2.2	Harmonische Funktionen	13
2.3	Erste zeitabhängige Gleichungen	21
3	Grundlagen für einen verallgemeinerten Lösungsbegriff	31
3.1	Der Gauß'sche Satz	31
3.2	Distributionen	38
3.3	Sobolevräume	47
4	Schwache Konvergenz	63
4.1	Dualräume und schwache Konvergenzbegriffe	63
4.2	Kompaktheit	70
4.3	Methoden zur Behandlung nichtlinearer Gleichungen	78

Teil II Lineare Elliptische Differentialgleichungen

5	Darstellungsformeln	93
5.1	Die Fundamentallösung	93
5.2	Green'sche Funktionen	98
5.3	Fourier-Reihen	105
6	Energiemethoden	111
6.1	Variationsmethode und symmetrische Probleme	111
6.2	Unsymmetrische Bilinearformen und Lax-Milgram	122
6.3	Regularität	129
7	Maximumprinzipien für elliptische Gleichungen	143
7.1	Geometrischer Zugang zu Maximumprinzipien	143
7.2	Beweis mit Testfunktionen, Anwendungen	148

XXI

8	Harmonische Funktionen: Weitere Eigenschaften und Verfahren	157
8.1	Regularität, Liouville-Theorem, Harnack-Ungleichung	157
8.2	Das Perron Verfahren	161
8.3	Spektralsatz und Laplace-Beltrami-Operator	168

Teil III Lineare zeitabhängige Differentialgleichungen

9	Darstellungsformeln für Parabolische Gleichungen	179
9.1	Lösung der Wärmeleitungsgleichung im Ganzraum	179
9.2	Maximumprinzip, Regularität, Halbgruppe	185
10	Zeitabhängige Funktionenräume	195
10.1	Bochner-Räume	196
10.2	Interpolationssätze für Raum-Zeit Funktionen	206
11	Energiemethoden für Parabolische Gleichungen	217
11.1	Existenz mit zeitdiskreten Approximationen	219
11.2	Maximumprinzip, Regularität und weitere Eigenschaften	231
12	Wellengleichungen	239
12.1	Modellierung und Lösungsformeln	239
12.2	Existenz mit einem Galerkinverfahren	246

Teil IV Variationsrechnung

13	Direkte Methode der Variationsrechnung	257
13.1	Euler-Lagrange-Gleichungen, Direkte Methode	259
13.2	Konvexität und Unterhalbstetigkeit	266
14	Nichtkonvexe Funktionale, Nebenbedingungen	275
14.1	Ein nichtkonvexes Problem	275
14.2	Nebenbedingungen	282
15	Konvexe Analysis	295
15.1	Fenchel-Konjugierte und Subdifferential	295
15.2	Konvexe Analysis in Anwendungen	304

Teil V Fixpunktsätze und Monotone Operatoren

16	Lösung nichtlinearer Gleichungen mit Fixpunktsätzen	315
16.1	Zentrale Fixpunktsätze, Variationsungleichungen	316
16.2	Lösung nichtlinearer elliptischer und parabolischer Gleichungen	326
17	Monotone Operatoren	339
17.1	Definitionen, Existenzsatz von Browder und Minty	339
17.2	Der p -Laplace Operator und der Monotonietrick	347

17.3	Variationsungleichungen und gestört monotone Operatoren	353
18	Stationäre poröse Medien Gleichungen	363
18.1	Nichtdegenerierte Strömungsgleichungen	365
18.2	Das Grundwasserproblem – ein freies Randwertproblem	368

Teil VI Nichtlineare Evolutionsgleichungen

19	Quasilineare Gleichungen	383
19.1	Existenzresultat mit dem Galerkin-Verfahren	384
19.2	Finite Elemente	390
20	Degenerierte Diffusion	397
20.1	Poröse Medien Gleichung und Regularisierungstechnik	397
20.2	Doppelt degenerierte Probleme und Zeitdiskretisierung	405
21	Eindeutigkeit und Stabilität	419
21.1	Eindeutigkeit und Vergleich von Lösungen	419
21.2	Langzeitverhalten und Stabilität	427

Teil VII Strömungsmechanik

22	Modellierung von Fluiden	435
22.1	Geschwindigkeit, Druck, Ideale Fluide	438
22.2	Innere Reibung und Navier-Stokes-Gleichungen	451
22.3	Potentialströmungen	457
23	Die Stokes-Gleichung	471
23.1	Variationsformulierung und Existenzresultat	472
23.2	Ein numerisches Verfahren für die Stokes-Gleichung	483
23.3	Die instationäre Gleichung	494
24	Navier-Stokes und Euler-Gleichungen	507
24.1	Der Konvektionsterm und Kompaktheitsresultate	507
24.2	Existenz und Eindeutigkeit für Navier-Stokes	518
24.3	Existenzresultate für die Euler-Gleichungen	528

Teil VIII Festkörpermechanik

25	Modellierung und lineare Theorie	539
25.1	Verformungen und Kräfte	539
25.2	Symmetrische Gradienten und Korn'sche Ungleichung	548
25.3	Existenzresultate für lineare Elastizitätsmodelle	559

26	Nichtlineare Elastizität	565
26.1	Ad hoc Modelle für eindimensionale Objekte	565
26.2	Nichtlineare dreidimensionale Modelle	572
26.3	Existenzresultat für ein quasikonvexes Variationsproblem	581
27	Plastizität	591
27.1	Modelle für plastische Verformung	591
27.2	Behandlung eines Modells mit kinematischer Härtung	599
27.3	Quasistationäre Evolution	603
	Verzeichnisse	615
	Literatur	621
	Stichwortverzeichnis	627